算額１・２・３　問題二の講評

応募者の多くは小円の中心の１つを大円の中心と重ね合わせ、そこから正六角形状に小円を並べる方法で、大円の面積の最小値を求めていました。それに対し，文ちゃんさんは次のように考えました。

$d=1$と仮定し(このようにしても一般性に問題はありません)，小円の中心を格子点とする正三角格子を構成する。その格子点の１つを xy 直交座標の原点Oとし，Oを通る格子線の１本を x 軸に置く。このとき格子点間の最小距離が１，整数kにおいて 直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k$ が格子線(の一部)を表すことに注意する。

ここで次のような条件を満たす点$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$を中心とした半径Rの円Cを考える。

① 点Oから点Pまでの距離が１以下

② Cの内部または周上にある格子点の個数が９６６個以上

このような円のうち，半径Rができるだけ小さいものを求め，この値をR'とするとき，問題文における大円の半径が$\left(R'+\dfrac{1}{2}\right)d$となり，このときの面積 $\left(R'+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi d^2$ もできるだけ小さいものになる。ここで上記のCが３点$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$を通るとき

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2=(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2=R^2$$

を満たすことを用いて，まずはCを通る３点の組P_1，P_2，P_3を与え，そこから円Cにおける条件①，②の両方を満たすかどうかを確認しつつ，Pの座標およびRを求める。３点P_1，P_2，P_3の組をいろいろと確かめたところ(現時点では)，

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{17}{2},\frac{17\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{17}{2},\frac{17\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_3\left(\frac{17}{2},-\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)$$

としたときにRが最も小さく，このときのPの座標は$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$R=\dfrac{\sqrt{1057}}{2}$となり，それによってできる円の内部または周上にある格子点の個数はちょうど９６６個となる。このRの値において，問題文における大円の半径は$\left(\dfrac{\sqrt{1057}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)d$であることから，その面積は

$$\left(\frac{\sqrt{1057}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\pi d^2 \fallingdotseq 280.75577\pi d^2$$

である。

文ちゃんさんはこの他にも，小円の中心の一部を格子点から移動して大円の面積をさらに小さくする解法も記載されていましたが，こちらはさらなる検証が必要であることから，現時点では

$$\left(\frac{\sqrt{1057}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\pi d^2 \fallingdotseq 280.75577\pi d^2$$

を最小の面積とします。

公益財団法人 日本数学検定協会