

第4回 日本数学オープン 第1戦 問題

問題1.

次の式を係数が整数の範囲で因数分解しなさい。

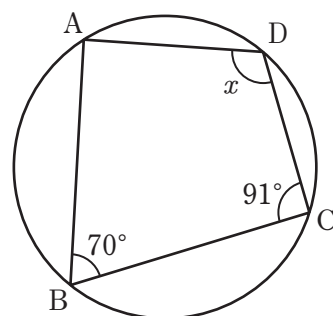
$$x^3 + x^2 + x + 1$$

問題2.

放物線 $y = x^2 - 2ax - a$ について、頂点の y 座標が最大になるときの a の値と、そのときの y 座標を求めなさい。

問題3.

右の図のように、四角形 $ABCD$ が円に内接し、 $\angle ABC = 70^\circ$ 、 $\angle BCD = 91^\circ$ です。このとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



問題4.

男子8人、女子7人の計15人の中から、6人の委員を選ぶとき、男子と女子がどちらも含まれるような選び方は全部で何通りありますか。

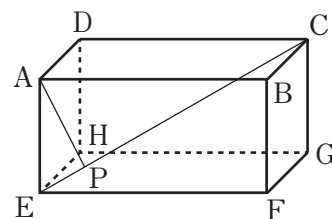
問題5.

x を実数とします。次の方程式を解きなさい。

$$\log_4 x + \log_4 (x + 1) = 1 + \log_2 x$$

問題 6.

右の図のような、 $AB=2$ 、 $AD=AE=1$ である直方体 $ABCD-EFGH$ があります。対角線 CE 上に点 P をとり、点 A と点 P を線分で結びます。 $AP \perp CE$ となるとき、 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ 、 $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ として、 \overrightarrow{AP} を \vec{b} 、 \vec{d} 、 \vec{e} を用いて表しなさい。



問題 7.

点 P が円 $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 21 = 0$ の周上を動くとき、点 P と直線 $y=x$ の距離の最小値を求めなさい。

問題 8.

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$ のとき、 $\sin 2\theta$ の値を求めなさい。

問題 9.

以下の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について、第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} + (n+1) = 2(a_n + n)$$

問題 10.

3次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の3つの解を α 、 β 、 γ とします。3次方程式 $x^3 + 2x^2 + 3x + 5 = 0$ の3つの解が

$$\alpha + \beta, \quad \beta + \gamma, \quad \gamma + \alpha$$

であるとき、実数 p 、 q 、 r の値をそれぞれ求めなさい。

第4回 日本数学オープン 第1戦 問題

問題 11.

双曲線 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ の漸近線の方程式を求めなさい。

問題 12.

$f(x) = \frac{1}{x+a}$, $g(x) = \frac{1}{x} + b$ について, $f(g(x))$ と $g(f(x))$ が同じ x の式で表されるとき, 定数 a と b の間に成り立つ等式を求めなさい。

問題 13.

次の極限値を求めなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{4n^2 + 5n})$$

問題 14.

$f(x)$ をすべての実数 x に対して定義された(微分可能とは限らない)連続関数とし

$$g(x) = \int_0^x t^2 f(x-t) dt$$

とおきます。 $g(x)$ の第3次導関数 $g'''(x)$ を $f(x)$ を用いて表しなさい。

問題 15.

次の定積分を求めなさい。ただし, e を自然対数の底とします。

$$\int_0^{(e-1)^2} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

問題 16.

下の表は、A～Jの10人に2つのテスト(テスト1, テスト2)を行った結果です。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
テスト1の点数	8	4	6	4	6	9	8	6	4	5
テスト2の点数	5	8	7	6	5	4	6	2	4	3

このとき、テスト1とテスト2の点数の相関係数を求めなさい(分数のままで答えてください)。

問題 17.

$z = 3 - 2i$ とします。点 z を原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数を求めなさい。

問題 18.

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ について、 n を正の整数とするとき、 A^n を求めなさい。

問題 19.

下のように、「2桁の数 \times 1桁の数 = 1桁の数 \times 2桁の数」が成り立つようなもののうち、左辺および右辺で使用される数字の順番が同じものを考えます。

$$\boxed{a}\boxed{b} \times \boxed{c} = \boxed{a} \times \boxed{b}\boxed{c}$$

たとえば、 $a = 2$, $b = 6$, $c = 5$ であるとき、「 $26 \times 5 = 2 \times 65$ 」となって、上の等式は成り立ちます。

a に1をあてはめます。このとき、 b , c にあてはまる数字の組をすべて答えなさい。ただし、 b , c はそれぞれ2以上9以下の整数とします。

問題 20.

「01:23」「23:01」のように、時と分をそれぞれ2個の数字によって表す24時間制のデジタル時計があります(秒の表示はありません)。

この時計がA時B分を表示した瞬間からちょうど x 分後に、B時A分を表示しました。時計が正常に作動しているとき、 x として考えられる最小の正の整数を求めなさい。

第4回 日本数学オープン 第1戦

問題

解答用紙に正六角形、および正六角形を組み合わせた図形をハニカム状に並べたものがあります。ここに次のルールに従って、できるだけ多くの図形(の内部)を塗り分けなさい。ただし、ここでの「正六角形」はすべて同じ大きさのものをを用いています。

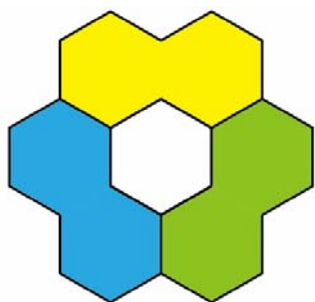
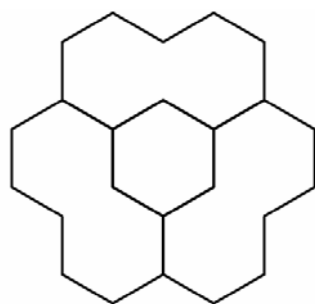
ルール

- ① 配布された3色の蛍光ペンを用いて、それぞれの図形(の内部)を塗り分けてください。ただし、色を塗らない図形があってもかまいません。
- ② 1つの図形に対し、1色のみを用いて図形(の内部)を塗ってください。もし、1つの図形に対し、2色以上を用いた場合はその図形およびそれと隣り合う図形をすべて「色を塗らない図形」として扱います。
- ③ 隣り合う図形に対して、同じ色を塗ってはいけません。ただし、色を塗らない図形が隣り合ってもかまいません。もし隣り合う図形に対し、同じ色を塗った場合は両方とも「色を塗らない図形」として扱います。
- ④ ハニカム状に並べたものの外側には何も塗らないでください(塗ったとしても無効とします)。

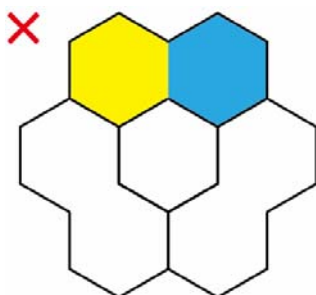
※この問題は「色を塗らない図形」の面積に応じて採点します。

注：提出する解答用紙の所定の欄に、チーム名を必ず書いてください。

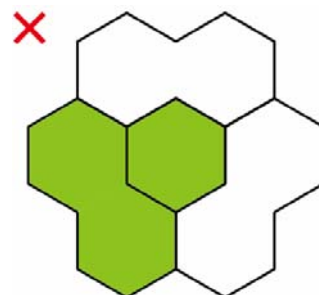
例題



3色を用いて、それぞれの図形(の内部)を塗り分けてください。

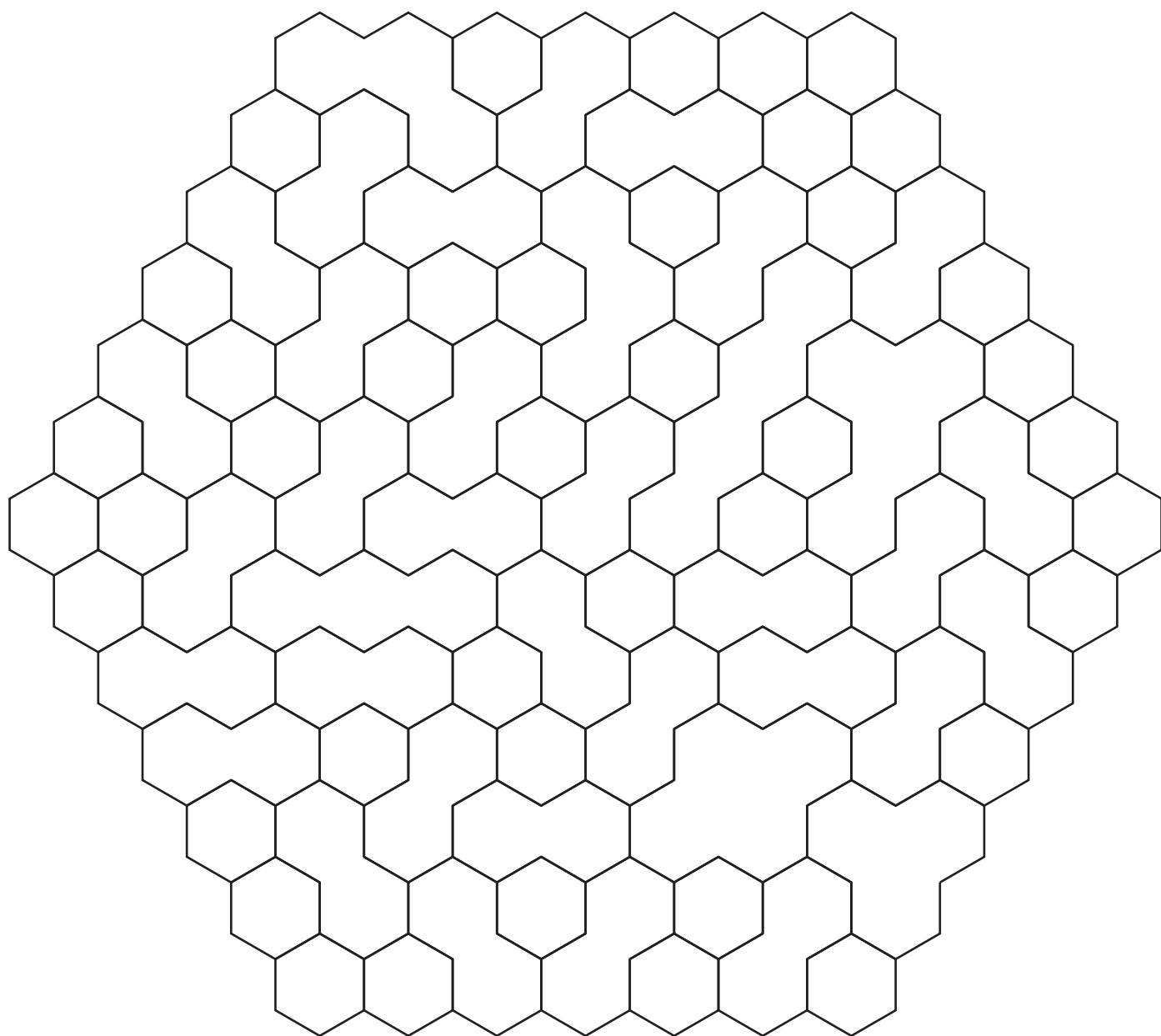


1つの図形に対し、1色のみ用いて図形(の内部)を塗ってください。



隣り合う図形に対して、同じ色を塗ってはいけません。ただし、色を塗らない図形が隣り合ってもかまいません。

第4回 日本数学オープン 第1戦 解答用紙



チーム名
