# Ramanujan Machine による未解決予想の証明と
# 昨年度の Rimse 理事長賞受賞作品における未解決問題の解決

都立西高校 2 年 山本修真

## 1 はじめに

数学において、コンピューターを用いて新たな発見を目指す試みはこれまでも行われてきた。よく知られたものには例えばメルセンヌ素数探索プロジェクト GIMPS などがある。Ramanujan Machine*1 もそれらと同様のプロジェクトだ。2020 年に Raayoni らイスラエル工科大学の研究チームが発表したもので、円周率などの数学定数に関する全く非自明な連分数式を数値的な計算から予想する [1]。

それらの予想*2*3 の中には、以下のように Ramanujan Machine が予想した後に実際に正しいことが証明されたものもある [2]。

$$\frac{8}{\pi^2} = 1 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{24}{\ddots \, 19 - \ddots - \cfrac{n^3(2n-1)}{(3n^2+3n+1) - \ddots}}} \tag{1.1}$$

$$\frac{18}{\pi^2} = 2 - \cfrac{2}{13 - \cfrac{48}{\ddots \, 34 - \ddots - \cfrac{2n^3(2n-1)}{(5n^2+6n+2) - \ddots}}} \tag{1.2}$$

しかし予想のほとんどは未だ証明されていない。それらを証明することが本研究の目的であり、実際に筆者はいくつかの予想を証明することに成功した！そして、この証明から Ramanujan Machine の予想に取り組むことの意義が意外な形で見えてきた。

また、非常に興味深いことに、2021 年度当コンクールにて Rimse 理事長賞を受賞された多面体分割に関する研究 [5] と深い関係があることが明らかになり、加えてその研究にて未解決だった問題を解決することができた。本稿ではその解法と、それを応用した残る Ramanujan Machine の予想の解決へ向けた展望も述べる。

## 2 連分数と級数の関係

以降、連分数は以下のように表す。

$$\mathrm{CF}[a_n, b_n] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}}$$

以下が成り立つことが知られている。

**補題 2.1** 数列 $A_n, B_n$ は以下を満たすとする。

$$\begin{cases} A_{-1} = 1, A_0 = a_0, A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} \\ B_{-1} = 0, B_0 = 1, B_n = a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} \end{cases}$$

このとき、

$$\mathrm{CF}[a_n, b_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

□

また、以下のように $A_n, B_n$ が求められる。

**補題 2.2** [2, Theorem 2] 数列 $\alpha_n, \beta_n$ は $n \geq 1$ において以下を満たすとする。

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = a_n \\ -\alpha_{n-1}\beta_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

また、数列 $y_n$ は $n \geq 1$ において以下を満たすとする。

$$y_n = a_n y_{n-1} + b_n y_{n-2}$$

*1 http://www.ramanujanmachine.com/ (2022.8.31 最終確認)

*2 以下の URL のサイトにて全ての予想が公表されている。
http://www.ramanujanmachine.com/results/ (2022.8.31 最終確認)

*3 ただし Ramanujan Machine のプログラムが改善される前に提起された予想 (注釈 2 のサイトにおいて “Previous results” とされているもの) は、改善後に提起された予想とは予想の形式が大きく異なり助長な部分も多いため、本稿においては扱わない。

このとき、$n \geq 1$ において

$$y_n = (y_0 - \alpha_0 y_{-1}) \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \beta_i \prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i + y_{-1} \prod_{i=0}^{n} \alpha_i$$

ただし任意の数列 $x_n$ において $\displaystyle\prod_{i=1}^{0} x_i = 1$ とする。 □

補題 2.1, 2.2 を用いて以下が示される。

**定理 2.3** (2.1) を満たす数列 $\alpha_n, \beta_n$ において、

$$\mathrm{CF}[a_n, b_n] = (a_0 - \alpha_0) + \alpha_0 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{-1}$$

ただし任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ とする。

**証明**. 補題 2.1 における条件を満たす数列 $A_n, B_n$ において、補題 2.2 より

$$A_n = (a_0 - \alpha_0) \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \beta_i \prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i + \prod_{i=0}^{n} \alpha_i = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ (a_0 - \alpha_0) \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} + \alpha_0 \right\}$$

同様に、

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \beta_i \prod_{i=k+1}^{n} \alpha_i = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

よって補題 2.1 より、

$$\mathrm{CF}[a_n, b_n] = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \to \infty} \left\{ (a_0 - \alpha_0) + \alpha_0 \left( \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{-1} \right\}$$

■

## 3 $\alpha_n, \beta_n$ の導出

定理 2.3 から、(2.1) を満たす数列 $\alpha_n$、つまり

$$\alpha_n = a_n + \frac{b_n}{\alpha_{n-1}} \tag{3.1}$$

の解が得られたとき予想は無限級数に帰着できることが分かる。

[2] では (3.1) の多項式解を天下り的に与えることで (1.1),(1.2) が証明されている。本章ではより一般に (3.1) の有理関数解を導くアルゴリズムを示す。

本章において $a_n, b_n$ は $a(n), b(n)$ と表し、以下が成り立つとする。

- $a(n), b(n)$ は $n$ についての 0 でない多項式である
- $2\deg(a) = \deg(b)$

また、多項式の係数を次のように表す。任意の多項式 $f(x)$ と非負整数 $k$ において

$$\{f(x)\}^{[k]} \coloneqq f^{[k]} \coloneqq \begin{cases} f(x) \text{ の } (\deg(f) - k) \text{ 次係数} & (0 \leq k \leq \deg(f)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

また、多項式 $p(x), q(x)$ が互いに素であることを $p(x) \perp q(x)$ と表す。また、$\deg(0) = -\infty$ とする。

まず、$\alpha_n$ が $n$ についての有理関数であると仮定する。このとき、互いに素な多項式 $p(x), q(x)$ $(q^{[0]} = 1)$ において

$$\alpha_n = \frac{p(n)}{q(n)} \tag{3.2}$$

とおいて (3.1) に代入すれば、

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(x)p(x-1) + b(x)q(x-1)}{p(x-1)} \tag{3.3}$$

この多項式解を求めればよいのだが、そのためには方程式を線形に書き換える必要がある。そこで以下が成り立つことを利用する。

**補題 3.1** 多項式 $r(x), s(x), t(x), u(x)$ において以下が成り立つとする。

$$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{t(x)}{u(x)} \qquad \left( r(x) \perp s(x)\,,\, t(x) \perp u(x)\,,\, s^{[0]} = u^{[0]} \right)$$

このとき、

$$\begin{cases} r(x) = t(x) \\ s(x) = u(x) \end{cases}$$

**証明**. 式を変形すると、

$$r(x)u(x) = t(x)s(x)$$

よって $r(x) \perp s(x)$ , $t(x) \perp u(x)$ より、$u(x)|s(x)$ かつ $s(x)|u(x)$、$r(x)|t(x)$ かつ $t(x)|r(x)$ が成り立つ。ここで $s^{[0]} = u^{[0]}$ であり、従って明らかに $r^{[0]} = t^{[0]}$ である。よって $r(x)$ と $t(x)$、$s(x)$ と $u(x)$ は一致する。 ■

(3.3) に補題 3.1 を当てはめるためには、右辺を「約分」しなければならない。そこで

$$\begin{aligned} g(x) &= p^{[0]} \cdot \gcd(p(x-1), a(x)p(x-1) + b(x)q(x-1)) \\ &= p^{[0]} \cdot \gcd(p(x-1), b(x)) \qquad (\because p(x-1) \perp q(x-1)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

として右辺の分子・分母を $g(x)$ で割る。

$$P(x-1) = \frac{p(x-1)}{g(x)} \quad , \quad B(x) = \frac{b(x)}{g(x)}$$

とおくと、

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(x)P(x-1) + B(x)q(x-1)}{P(x-1)}$$

両辺とも分子と分母が互いに素であり分母はモニックであるため、補題 3.1 より

$$\begin{cases} p(x) = a(x)P(x-1) + B(x)q(x-1) \\ q(x) = P(x-1) \end{cases}$$

第１式に第２式と $p(x) = g(x+1)P(x)$ を代入して、

$$g(x+1)P(x) = a(x)P(x-1) + B(x)P(x-2)$$

この線形な方程式から、以下の手順で $g(x), B(x), P(x)$ を導くことができる。

**定理 3.2** 多項式 $g(x), B(x), P(x)$ について以下が成り立つ。

(i) $\deg(g) = \deg(a)$

(ii) $g(x) | b(x)$

(iii) $g^{[0]} = \dfrac{a^{[0]} \pm \sqrt{(a^{[0]})^2 + 4b^{[0]}}}{2}$

(iv) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \left( k \coloneqq \dfrac{a^{[1]} + B^{[1]} - g^{[1]} - g^{[0]} \deg(a)}{2g^{[0]} - a^{[0]}} \right)$

(v) $P^{[0]} = 1$

(vi) $\deg(P) = k$

(vii) $g(x+1)P(x) = a(x)P(x-1) + B(x)P(x-2)$

**証明**. (vii) は既に示された。

(v) は $g(x), P(x)$ の定義より明らか。

まず (i) を示す。(vii) において以下が成り立つ。

$$\deg(B) - \deg(a) = \deg(a) - \deg(g)$$

よって $\deg(a) - \deg(g) > 0$ のとき最高次の係数比較から $P^{[0]} = 1$ より $B^{[0]} = 0$。
しかし、 $B(x) \not\equiv 0$ よりこれは明らかに成り立たない。よって $\deg(a) - \deg(g) \leq 0$。
同様に、 $\deg(a) - \deg(g) < 0$ のとき、 $g^{[0]} = 0$。
これは $g(x) \not\equiv 0$ より明らかに成り立たない。よって $\deg(a) - \deg(g) \geq 0$。
従って $\deg(g) = \deg(a)$。

(ii) は (3.4) より明らか。

次に (iii) を示す。(i) より $\deg(g) = \deg(a) = \deg(B)$ であるため (vii) における最高次の項の係数比較から、

$$g^{[0]} = a^{[0]} + B^{[0]} = a^{[0]} + \frac{b^{[0]}}{g^{[0]}}$$

$$g^{[0]} = \frac{a^{[0]} \pm \sqrt{(a^{[0]})^2 + 4b^{[0]}}}{2}$$

次に (vi) を示す。任意の多項式 $f(x)$ と定数 $c$ において以下が成り立つことから、最高次の次に高次な項の係数を比較することで多項式の次数についての情報を取り出せることが分かる。

$$\{f(x+c)\}^{[1]} = f^{[1]} + cf^{[0]} \deg(f)$$

(vii) より、

$$\{g(x+1)P(x)\}^{[1]} = \{a(x)P(x-1)\}^{[1]} + \{B(x)P(x-2)\}^{[1]}$$

ここで任意の多項式 $p(x), q(x)$ において

$$\{p(x) \cdot q(x)\}^{[1]} = p^{[1]}q^{[0]} + p^{[0]}q^{[1]}$$

が成り立つ。よって、

$$\{g(x+1)\}^{[0]}P^{[1]} + \{g(x+1)\}^{[1]}P^{[0]} = a^{[0]}\{P(x-1)\}^{[1]} + a^{[1]}\{P(x-1)\}^{[0]} + B^{[0]}\{P(x-2)\}^{[1]} + B^{[1]}\{P(x-2)\}^{[0]}$$

$$g^{[0]} \cdot P^{[1]} + \left(g^{[1]} + g^{[0]} \deg(g)\right) \cdot P^{[0]} = a^{[0]} \left(P^{[1]} - P^{[0]} \deg(P)\right) + a^{[1]}P^{[0]} + \frac{b^{[0]}}{g^{[0]}} \left(P^{[1]} - 2P^{[0]} \deg(P)\right) + B^{[1]}P^{[0]}$$

$$g^{[0]}\cdot P^{[1]}+g^{[1]}+g^{[0]}\deg(g)=a^{[0]}\cdot P^{[1]}-a^{[0]}\deg(P)+a^{[1]}+\frac{b^{[0]}}{g^{[0]}}\cdot P^{[1]}-\frac{2b^{[0]}}{g^{[0]}}\deg(P)+B^{[1]}$$

(iii) より $a^{[0]}+\dfrac{2b^{[0]}}{g^{[0]}}=2g^{[0]}-a^{[0]}$ から、

$$\deg(P)=\frac{a^{[1]}+B^{[1]}-g^{[1]}-g^{[0]}\deg(a)}{2g^{[0]}-a^{[0]}}$$

(iv) は (vi) より明らかである。 ■

$g(x), B(x), P(x)$ が得られれば、以下のように (2.1) を満たす有理関数 $\alpha_n, \beta_n$ が得られる。

**定理 3.3** (2.1) は $\alpha_n, \beta_n$ について以下の解を持つ。

$$\alpha_n=\frac{g(n+1)P(n)}{P(n-1)} \quad , \quad \beta_n=-\frac{B(n)P(n-2)}{P(n-1)}$$

**証明**. 仮定から容易に示される。

$$\alpha_n=\frac{p(n)}{q(n)}=\frac{g(n+1)P(n)}{P(n-1)}$$

$$\beta_n=a_n-\alpha_n=a_n-\frac{g(n+1)P(n)}{P(n-1)}=-\frac{B(n)P(n-2)}{P(n-1)}$$

■

## 4 個々の予想の証明

定理 2.3, 3.2, 3.3 を用いることで、以下の定理 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 を証明することに成功した。また、定理 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 は連分数を級数によって表すことはできたもののその級数の値を求めることは出来なかった。

**定理 4.1**

$$\frac{16}{12-\pi^2}=\mathrm{CF}[3n^2+11n+9,-n(n+2)^2(2n+1)]$$

**定理 4.2**

$$\frac{16}{-4+\pi^2}=\mathrm{CF}[3n^2+7n+3,-n^2(n+2)(2n-1)]$$

**定理 4.3**

$$\frac{32}{32-3\pi^2}=\mathrm{CF}[3n^2+15n+15,-n(n+2)(n+4)(2n+1)]$$

**定理 4.4**

$$\frac{1}{1-\log(2)}=\mathrm{CF}[3n^2+7n+4,-2n^2(n+1)^2]$$

**定理 4.5**

$$\frac{1}{-1+2\log(2)}=\mathrm{CF}[3n+3,-2n^2]$$

**定理 4.6**

$$\mathrm{CF}[3n^2+3n+1,-n^3(2n-3)]=-\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+1)(k^2+3k-2)(k^2+5k+2)}\right\}^{-1}$$

この値は $\dfrac{16}{4+\pi^2}$ であると予想されている。

**定理 4.7**

$$\mathrm{CF}[3n^2+7n+3,-n^2(n+2)(2n-3)]=-\frac{1}{32}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+1)(k+2)(k+3)(k^2+7k-4)(k^2+9k+4)}\right\}^{-1}$$

この値は $\dfrac{32}{\pi^2}$ であると予想されている。

**定理 4.8**

$$\mathrm{CF}[3n^2+11n+9,-n(n+2)^2(2n-1)=\frac{1}{16}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+3)(2k+1)(k^2+7k+4)(k^2+9k+12)}\right\}^{-1}$$

この値は $\dfrac{16}{-8+\pi^2}$ であると予想されている。

**定理 4.9**

$$\mathrm{CF}[3n^2+9n+7,-(n+1)^3(2n-3)]=-3-\frac{1}{64}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{(k+1)2^k}{(k+2)(k+4)(k+5)(k^3+10k^2-k-2)(k^3+13k^2+22k+8)}\right\}^{-1}$$

この値は $\dfrac{16+3\pi^2}{16-\pi^2}$ であると予想されている。

**定理 4.1 の証明**. $a_n = 3n^2 + 11n + 9, b_n = -n(n+2)^2(2n+1)$ として、定理 3.2, 3.3 から (2.1) の解を導く。
まず、(i),(ii),(iii) によってあり得る $g(x), B(x)$ を以下のように有限通りに絞り込むことができる。

$$(g(x), B(x)) = \left(2x(x+2), -(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \ , \ \left(2(x+2)^2, -x\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \ , \ ((x+2)(2x+1), -x(x+2)) \ , \ \left(x(2x+1), -(x+2)^2\right)$$
$$(x(x+2), -(x+2)(2x+1)) \ , \ \left((x+2)^2, -x(2x+1)\right) \ , \ \left((x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right), -2x(x+2)\right) \ , \ \left(x\left(x+\frac{1}{2}\right), -2(x+2)^2\right)$$

これらのうち (iv) を満たすのは、

$$(g(x), B(x), \deg(P)) = ((x+2)(2x+1), -x(x+2), 0) \ , \ \left(x(2x+1), -(x+2)^2, 2\right)$$

それぞれについて (vii) における $P(x)$ のモニック多項式解を計算すればよい。
$\deg(P) = 0$ の場合、つまり $P(x) = 1$ のとき (vii) は成り立つ。
従って定理 3.3 より (2.1) は以下の解を持つ。

$$\alpha_n = (n+3)(2n+3), \beta_n = n(n+2)$$

($\deg(P) = 2$ の場合も同じ $\alpha_n, \beta_n$ が導かれる。)
よって任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i+2}{i+3} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i+3} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{3}{k+3} \cdot \frac{3}{(2k+3)(2k+1)} \cdot \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

よって定理 2.3 から

$$\mathrm{CF}[3n^2 + 11n + 9, -n(n+2)^2(2n+1)] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{2^k}{(k+3)(2k+1)(2k+3)} \right\}^{-1}$$

この級数の値は [3, Eq.3.58,Eq.3.59,Eq.3.96] によって求められる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{2^k}{(k+3)(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{15} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k!)} \frac{2^k}{k+3} + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{2^k}{2k+1} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \frac{2^k}{2k+3} \\ &= \frac{1}{15}\left(6\pi - \frac{15}{16}\pi^2 - \frac{35}{4}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\pi - 4\right) = \frac{12 - \pi^2}{16} \end{aligned}$$

■

以降の証明では、定理 3.2, 3.3 を用いて $\alpha_n, \beta_n$ を導出する部分などは省略する。

**定理 4.2 の証明**. $a_n = 3n^2 + 7n + 3, b_n = -n^2(n+2)(2n-1)$ として、

$$\alpha_n = (n+3)(2n+1), \beta_n = n^2$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+3} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

従って定理 2.3 及び [3, Eq.3.58,Eq.3.94,Eq.3.95,Eq.3.96] より、

$$\begin{aligned} \mathrm{CF}[3n^2 + 7n + 3, -n^2(n+2)(2n-1)] &= \frac{1}{2}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!} \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k+2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{k+3} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2k+1} \right) \right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ -\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi^2}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\pi - \frac{3}{8}\pi^2 - 3\right) - \frac{1}{10}\left(6\pi - \frac{15}{16}\pi^2 - \frac{35}{4}\right) + \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}^{-1} = \frac{16}{-4 + \pi^2} \end{aligned}$$

■

**定理 4.3 の証明**. $a_n = 3n^2 + 15n + 15, b_n = -n(n+2)(n+4)(2n+1)$ として、

$$\alpha_n = (n+5)(2n+3), \beta_n = n(n+2)$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i+2}{i+5} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{180}{(k+3)(k+4)(k+5)(2k+1)(2k+3)} \cdot \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

従って定理 2.3 及び [3, Eq.3.58,Eq.3.59,Eq.3.96,Eq.3.97,Eq.3.98] より、

$$\begin{aligned} &\mathrm{CF}[3n^2 + 15n + 15, -n(n+2)(n+4)(2n+1)] \\ &= \frac{1}{12}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!} \left( \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{k+3} - \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{k+4} - \frac{1}{126} \cdot \frac{1}{k+5} + \frac{4}{315} \cdot \frac{1}{2k+1} - \frac{4}{105} \cdot \frac{1}{2k+3} \right) \right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{12}\left\{ \frac{1}{30}\left(6\pi - \frac{15}{16}\pi^2 - \frac{35}{4}\right) - \frac{1}{35}\left(\frac{83}{6}\pi - \frac{35}{16}\pi^2 - \frac{763}{36}\right) + \frac{1}{126}\left(31\pi - \frac{315}{64}\pi^2 - \frac{193}{4}\right) + \frac{4}{315} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{105}\left(\frac{3}{2}\pi - 4\right) \right\}^{-1} = \frac{32}{32 - 3\pi^2} \end{aligned}$$

■

**定理 4.4 の証明**. $a_n = 3n^2+7n+4, b_n = -2n^2(n+1)^2$ として、

$$\alpha_n = 2(n+1)(n+2), \beta_n = n(n+1)$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{2 \cdot 2^{-k}}{(k+1)(k+2)}$$

従って定理 2.3 より、

$$\mathrm{CF}[3n^2+7n+4, -2n^2(n+1)^2)] = 2\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right\}^{-1} = 2\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{k} - 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{k} - \frac{1}{2}\right)\right\}^{-1} = \frac{1}{1-\log(2)}$$

■

**定理 4.5 の証明**. $a_n = 3n+3, b_n = -2n^2$ として、

$$\alpha_n = \frac{2(n+1)(n+3)}{n+2}, \beta_n = \frac{n(n+1)}{n+2}$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{6 \cdot 2^{-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

従って定理 2.3 より、

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}[3n+3, -2n^2] &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+3}\right)\right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{k} - 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{k} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{-k}}{k} - \frac{5}{8}\right)\right\}^{-1} = \frac{1}{-1+2\log(2)}\end{aligned}$$

■

**定理 4.6 の証明**. $a_n = 3n^2+3n+1, b_n = -n^3(2n-3)$ として、

$$\alpha_n = \frac{(n+1)(2n-1)(n^2+5n+2)}{n^2+3n-2}, \beta_n = \frac{n^2(n^2+n-4)}{n^2+3n-2}$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k}\frac{i}{i+1}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2+i-4}{(i+2)^2+(i+2)-4}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{-4}{(k^2+3k-2)(k^2+5k-2)}\cdot\frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

従って定理 2.3 より、

$$\mathrm{CF}[3n^2+3n+1, -n^3(2n-3)] = -\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+1)(k^2+3k-2)(k^2+5k+2)}\right\}^{-1}$$

■

**定理 4.7 の証明**. $a_n = 3n^2+7n+3, b_n = -n^2(n+2)(2n-3)$ として、

$$\alpha_n = \frac{(n+3)(2n-1)(n^2+9n+4)}{n^2+7n-4}, \beta_n = \frac{n^2(n^2+5n-10)}{n^2+7n-4}$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k}\frac{i}{i+3}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2+5i-10}{(i+2)^2+5(i+2)-10}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)}\cdot\frac{-16}{(k^2+7k-4)(k^2+9k+4)}\cdot\frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

従って定理 2.3 より、

$$\mathrm{CF}[3n^2+7n+3, -n^2(n+2)(2n-3)] = -\frac{1}{32}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+1)(k+2)(k+3)(k^2+7k-4)(k^2+9k+4)}\right\}^{-1}$$

■

**定理 4.8 の証明**. $a_n = 3n^2+11n+9, b_n = -n(n+2)^2(2n-1)$ として、

$$\alpha_n = \frac{(n+3)(2n+1)(n^2+9n+12)}{n^2+7n+4}, \beta_n = \frac{n(n+2)(n^2+5n-2)}{n^2+7n+4}$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n \geq 1$ において $\alpha_n \neq 0$ であるため、

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k}\frac{i+2}{i+3}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{2i+1}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i^2+5i-2}{(i+2)^2+5(i+2)-2}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2i^2}{2i(2i-1)} = \frac{3}{k+3}\cdot\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{48}{(k^2+7k+4)(k^2+9k+12)}\cdot\frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$$

従って定理 2.3 より、

$$\mathrm{CF}[3n^2+11n+9,-n(n+2)^2(2n-1)=\frac{1}{16}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^k}{(k+3)(2k+1)(k^2+7k+4)(k^2+9k+12)}\right\}^{-1}$$

■

**定理 4.9 の証明**. $a_n=3n^2+9n+7, b_n=-(n+1)^3(2n-3)$ として、

$$\alpha_n=\frac{(n+2)(2n-1)(n+5)(n^3+13n^2+22n+8)}{(n+4)(n^3+10n^2-n-2)}, \beta_n=\frac{(n+1)^2(n+3)(n^3+7n^2-18n+8)}{(n+4)(n^3+10n^2-n-2)}$$

は (2.1) を満たす。ここで任意の $n\geq 1$ において $\alpha_n\neq 0$ であるため、

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{\alpha_i}&=\prod_{i=1}^{k}\frac{i+1}{i+2}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i+3}{i+5}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i+1}{i}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{i^3+7i^2-18i+8}{(i+2)^3+7(i+2)^2-18(i+2)+8}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2i^2}{2i(2i-1)}\\&=\frac{2}{k+2}\cdot\frac{20}{(k+4)(k+5)}\cdot(k+1)\cdot\frac{-16}{(k^3+10k^2-k-2)(k^3+13k^2+22k+8)}\cdot\frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}\end{aligned}$$

従って定理 2.3 より、

$$\mathrm{CF}[3n^2+9n+7,-(n+1)^3(2n-3)]=-3-\frac{1}{64}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\frac{(k+1)2^k}{(k+2)(k+4)(k+5)(k^3+10k^2-k-2)(k^3+13k^2+22k+8)}\right\}^{-1}$$

■

## 5 母関数による解法

本章では、本稿の冒頭で述べた多面体分割に関する研究 [5] の本研究への応用について述べる。

まず、本研究にとって最も重要な [5, 第五章] の内容を大まかに説明しよう。

ある特殊な多面体 “$(n+2,2)$-単純結合型多面体” について、その四面体による分割の場合の数 $b_n$ は以下の漸化式で表される。

$$b_0=1\ ,\ b_{n+1}=c_{n+1}+\sum_{i=0}^{n}b_i b_{n-i}$$

ただし $c_n$ はカタラン数。この漸化式から、$b_n$ の母関数 $f(x)$ が求められる。

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}}{2x} \tag{5.1}$$

ここで $h(x)=\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1}$ , $d_n=h^{(n)}(0)$ とすると、$h(x)$ について

$$(64x^2-28x+3)h''(x)+2(32x-7)h'(x)-4h(x)=0 \tag{5.2}$$

が成り立つことから、

$$d_0=1, d_1=-2\ ,\ 3d_{n+2}-14(2n+1)d_{n+1}+4(4n+1)(4n-1)d_n=0 \tag{5.3}$$

が分かる。さらに $\alpha_n=3^n d_{n+2}/d_{n+1}$ とおくと、

$$\alpha_{-1}=-\frac{2}{3}\ ,\ \alpha_n=14(2n+1)-\frac{12(4n+1)(4n-1)}{\alpha_{n-1}}$$

従ってこの漸化式の解が導かれたとき $b_n$ が求められるのだが、これは本稿の第三章において扱った差分方程式 (3.1) と全く同じ形である！

ではこの方程式も有理関数解が存在して第三章に提示したアルゴリズムによって導けるのか。実はそうではない。そのことは [5, 補題 8.2] によって既に示されている。さらに [5] では、差分方程式のガロア理論を用いて $\alpha_n$ の初等的な解が存在しないことが示されている [5, 定理 8.5]。

この定理に関して、筆者はより一般に差分方程式 (3.1) は有理関数解を持たないとき初等的解を持たないと予想したが、筆者はそれを証明するのに十分なほどガロア理論を理解していない。

ここで「初等的」とは、（狭い意味では）“有理複素関数とその総和 $\sum_{i=0}^{n}$ 及び総乗 $\prod_{i=0}^{n}$ を有限個用いた形で表せ” ることを指す。ただし “総和”,“総乗” とは数列 $x_n$ に対して $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}x_i,\prod_{i=0}^{n}x_i$ を与える操作であり、単に総和・総乗記号を指すのではないということに注意しなければならない [5, 定義 7.1]。

実際、実は $d_n$ は有理関数と総和・総乗記号を有限個用いた形でなら表すことができる。

**定理 5.1** (5.3) を満たす数列 $d_n$ の $n\geq 1$ における一般項は、

$$d_n=n!\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)(k-2n)}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n}$$

その解法として、筆者は (5.2) において Gauss の超幾何微分方程式を当てはめる方法と (5.1) において一般二項定理 (後述の定理 5.2) を用いる方法の二つを考えた。前者はより一般的な議論へ発展させることができるが後者に比べ計算が非常に複雑なうえ厳密に考えることが難しいため、

本稿では後者を用いる。

**定理 5.2 (一般二項定理)** $|x|<1$ なる複素数 $x$ と任意の複素数 $\alpha$ において

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

□

いずれにせよ重要なのは、関数の級数展開の係数列を求めるうえで "$h(x)$ の $x=0$ における $n$ 階微分" という視点にとらわれないことである。

**定理 5.1 の証明**. 一般二項定理より 0 の近傍の $x$ において、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt{1-4x}-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m} \left(2\sqrt{1-4x}-2\right)^m \qquad (\because \left|2\sqrt{1-4x}-2\right|<1) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m} (-2)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (1-4x)^{\frac{k}{2}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m} (-2)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{k}{2}}{n} (-4x)^n \qquad (\because |-4x|<1) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m} (-2)^m (-4)^n \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

ここで $A_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n}$ $(m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とおくと、

$$\begin{aligned}
A_{m,n+1} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} \frac{\frac{k}{2}-n}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} - \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n}
\end{aligned}$$

ここで $k>0$ において $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1} = m\left\{\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k}\right\}$、$k=0$ において $k\binom{m}{k} = 0 = m\left\{\binom{m}{k} - \binom{m-1}{k}\right\}$ より

$$A_{m,n+1} = \frac{m}{2(n+1)} (A_{m,n} - A_{m-1,n}) - \frac{n}{n+1} A_{m,n}$$

$A_{m,n} = \dfrac{(-1)^m m!}{2^n n!} B_{m,n}$ とおくと

$$B_{m,n+1} = B_{m-1,n} + (m-2n) B_{m,n} \qquad (5.5)$$

ここで $B_{m,n}$ の初期値について以下が成り立つ。

$$B_{m,0} = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 0 & (m>0) \end{cases}$$

従って (5.5) より $n$ についての帰納法によって、より一般に $m>n$ のとき $B_{m,n}=0$ であることが分かる。

また $m=0$ のとき以下が成り立つ。

$$B_{0,n} = 2^n n! A_{0,n} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases} \qquad (5.6)$$

従って $0<m\leq n$ のときの $B_{m,n}$ が求められれば十分である。

(5.5) において $B_{m,n} = C_{n-m,n}$ ,$p=n-m$ とおくと

$$C_{p+1,n+1} = C_{p+1,n} - (n+p) C_{p,n}$$

よって $n>p+1$ において

$$C_{p+1,n} = C_{p+1,p+1} - \sum_{k=p+1}^{n-1} (k+p) C_{p,k} \qquad (5.7)$$

ここで $0<m\leq n$ と仮定すると、$p\geq 0$ から (5.5) より $C_{p+1,p+1} = B_{0,p+1} = 0$ であるため

$$C_{p+1,n} = -\sum_{k=p+1}^{n-1} (k+p) C_{p,k} \qquad (5.8)$$

これを用いて以下を $p$ についての帰納法によって示す。

$$C_{p,n} = (-1)^p (2p-1)!! \binom{n+p-1}{2p} \qquad (n>p) \qquad (5.9)$$

ただし $(-1)!!=1$ とする。

まず $p=0$ において、(5.6),(5.7) より

$$C_{0,n} = C_{0,0} - \sum_{k=0}^{n-1} (k-1) C_{-1,k} = B_{0,0} - \sum_{k=0}^{n-1} (k-1) B_{k+1,k} = 1$$

よって (5.9) は成り立つ。

次に $p = q \geq 0$ において (5.9) が成り立つと仮定すると、(5.8) より

$$\begin{aligned}
C_{q+1,n} &= -\sum_{k=q+1}^{n-1} (k+q) \cdot (-1)^q (2q-1)!! \binom{k+q-1}{2q} \\
&= (-1)^{q+1}(2q-1)!! \sum_{k=q+1}^{n-1} (2q+1) \binom{k+q}{2q+1} \\
&= (-1)^{q+1}(2q+1)!! \sum_{k=q+1}^{n-1} \binom{k+q+1}{2q+2} - \binom{k+q}{2q+2} \\
&= (-1)^{q+1}(2q+1)!! \left\{ \binom{n+q}{2(q+1)} - \binom{2q}{2q+2} \right\} \\
&= (-1)^{q+1}(2q+1)!! \binom{n+q}{2q+2}
\end{aligned}$$

よって $p = q+1$ において (5.9) が成り立つ。

よって任意の非負整数 $p$ において (5.9) が成り立つ。

従って、$m > n$ または $m = 0$ のとき

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} = \begin{cases} 1 & (m = n = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$0 < m \leq n$ のとき

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} = \frac{(-1)^m m!}{2^n n!} C_{n-m,n} = \frac{(-1)^m m!}{2^n n!} \cdot (-1)^{n-m} (2n-2m-1)!! \frac{(2n-2m-1)!}{(m-1)!(2n-2m)!} = (-1)^n 2^{m-2n} \frac{m}{2n-m} \binom{2n-m}{n}$$

よって $\binom{\frac{1}{2}}{m} = \frac{(-1)^{m-1}}{4^m(2m-1)} \binom{2m}{m}$ から

$$\binom{\frac{1}{2}}{m} (-2)^m (-4)^n \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} = \begin{cases} 1 & (m = n = 0) \\ 0 & (m > n \vee m = 0 \neq n) \\ \dfrac{m}{(2m-1)(m-2n)} \dbinom{2m}{m} \dbinom{2n-m}{n} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

従って (5.4) の二重級数は $|2\sqrt{1-4|x|} - 2| < 1$ かつ $|-4|x|| < 1$ なる $x$ において明らかに絶対収束するため、

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sqrt{1-4x} - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m} (-2)^m (-4)^n \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{k}{2}}{n} \qquad \left( |x| < \frac{3}{16} \right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{(2m-1)(m-2n)} \binom{2m}{m} \binom{2n-m}{n}
\end{aligned}$$

よって (5.3) を満たす数列 $d_n = h^{(n)}(0)$ の $n \geq 1$ における一般項は、

$$d_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)(k-2n)} \binom{2k}{k} \binom{2n-k}{n}$$

■

このように、多項式 $p(x), q(x)$ に対して差分方程式

$$A_n = p(n) A_{n-1} + q(n) A_{n-2} \tag{5.10}$$

の解 $A_n$ は、その母関数を考えることで導けることがある。特に $\deg(p) \leq 1, \deg(q) \leq 2$ のとき $A_n$ の母関数が満たすべき微分方程式は全て Gauss の微分方程式などの超幾何級数解を持つ方程式に帰着するため、$A_n$ を導くことができる。

しかし (5.10) が $\deg(p) \leq 1, \deg(q) \leq 2$ を満たさない場合、その母関数が満たすべき微分方程式は階数が 2 を超え、超幾何級数解を持つ方程式に帰着するとは限らなくなる。

とはいえ微分方程式は差分方程式に比べはるかに多くの数学者によって研究されたテーマであり、微分方程式を用いるアプローチによって他の予想が解ける可能性は十分にあるだろう。

もう一つ、定理 5.1 において注目すべき点がある。それは解の形である。$F_{n.k}$ を有限台を持つ $n, k$ についての超幾何数列として、$d_n$ は

$$d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{n,k} \tag{5.11}$$

の形で表される。この形の解を持つ差分方程式は他にもあり、例えば Apéry 定数の無理性証明では、差分方程式

$$(n+1)^3 a_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) a_n + n^3 a_{n-1} = 0$$

が解

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

を持つことが用いられた [4, pp.101-102]。

(5.11) のように表された数列に対してその数列が満たす差分方程式を導く方法はすでに知られており、Zeilberger のアルゴリズムと呼ばれる [4, Chapter 7]。筆者は Zeilberger のアルゴリズムの逆を考えることでより多くの予想を証明できるのではないかと考えている。

## 6　感想と今後の展望

本研究から分かるように、Ramanujan Machine の予想は連分数というより差分方程式の問題としての重要性を秘めている。このことから差分方程式の重要性を知るとともに、高校で習う漸化式が氷山の一角に過ぎないことを痛感した。

また、全く関係ないように思える連分数と多面体分割の問題が同じ問題に帰着することを知ったときは、心から感動した。

二項定理や分割数など、組み合わせ論と母関数には深い関係がある。この視点から多面体分割について論じれば興味深い研究になりそうだ。

今後の展望としては、前述した (3.1) の非可解性に関する予想の証明や、(3.1) に対する微分方程式を用いたアプローチ、Zeilberger のアルゴリズムの逆を考えるアプローチに取り組みたい。

## 参考文献

[1] 鈴木 治郎. 連分数公式を予測するラマヌジャン・マシンの紹介. 2021. https://iiiar.org/iiars/doc/iiars_workshop9_4_5.pdf

[2] Shirali Kadyrov and Alibek Orynbassar. On the solutions of second order difference equations with variable coefficients. *arXiv preprint arXiv:2103.03554*, 2021.

[3] T. Sherman. *Summation of Glaisher and Apéry-like series*. 2000.

[4] Wolfram Koepf. *Hypergeometric Summation : An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*. Universitext. 2014.

[5] 菅原 諒. 『差分代数による多面体の四面体分割における場合の数の定式化』 第 9 回 算数数学の自由研究コンクール 入賞作品. 2021. https://www.rimse.or.jp/research/past/pdf/9th/work06.pdf