数学検定
準拠テキスト

1級

線形代数

公益財団法人 日本数学検定協会 監修
中村　力 著

Linear Algebra

森北出版株式会社

「数学検定 1 級準拠テキスト
線形代数」

サンプルページ

この本の定価・判型などは，以下の URL からご覧いただけます.
http://www.morikita.co.jp/books/mid/005821

※このサンプルページの内容は，初版 1 刷発行時のものです.

●本書のサポート情報を当社 Web サイトに掲載する場合があります．
下記の URL にアクセスし，サポートの案内をご覧ください．

http://www.morikita.co.jp/support/

●本書の内容に関するご質問は，森北出版 出版部「(書名を明記)」係宛に書面にて，もしくは下記の e-mail アドレスまでお願いします．なお，電話でのご質問には応じかねますので，あらかじめご了承ください．

editor@morikita.co.jp

●本書により得られた情報の使用から生じるいかなる損害についても，当社および本書の著者は責任を負わないものとします．

■本書に記載している製品名，商標および登録商標は，各権利者に帰属します．

■本書を無断で複写複製（電子化を含む）することは，著作権法上での例外を除き，禁じられています．複写される場合は，そのつど事前に(社)出版者著作権管理機構（電話 03-3513-6969，FAX 03-3513-6979，e-mail：info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください．また本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャンやデジタル化することは，たとえ個人や家庭内での利用であっても一切認められておりません．

まえがき

「数学検定」1 級の出題範囲は広大であり，1 級に合格するには，地道な学習の積み重ねと，短時間で解答をまとめあげる答案作成力が要求される．

先に上梓した「ためせ実力！めざせ 1 級！ 数学検定 1 級 実践演習」では，1 級出題範囲の過去問題，解答・解説を三つのレベルに分けて 1 冊にまとめた．これにより，1 級の過去問題の全容を俯瞰できるだろう．しかし，1 級の出題範囲はあまりに広範にわたるため，読者の中にはもっと理解を深めたい箇所もいくつかあると思われる．

本書は「数学検定」1 級を目指す方が，主要な出題範囲の一つである「線形代数」の学習において，これらに関連する知見を効率的に学習し，豊富な例題や演習問題を解くことで，より一層の理解と答案作成力の向上を図ることを目的とする．

本書に掲載された問題には，「数学検定」1 級で過去に出題された問題が多く含まれているので，1 級合格へ向けた効果的な学習を期待できるだろう．

また，線形代数をもっと学習したい，「数学検定」1 級レベルの手ごたえのある問題をもっと解いてみたいといった知的充足感を満たすためにも，本書はおおいに活用できると思う．

本書を最大限に活用することにより，「数学検定」最難関である 1 級合格を手中に収めていただきたい．ただし，「数学検定」1 級合格はゴールではない．1 級の彼方にある数学の世界は，さらに奥が深く，魅力的かつ神秘的である．1 級合格は，これらを理解するための一歩を踏み出したに過ぎない．さらに，学習，研鑽を積まれて，その世界を歩まれるならば，著者の望外の喜びになるだろう．

2016 年 5 月

著　者

本書の使い方

Step1　出題傾向と学習上のポイント

各章・節ごとに，過去の出題傾向の概要を示して，学習上の対策やアドバイスを記している．これにより，これから学習していく方向性やプランが設定できると思う．

Step2　要点整理

「出題傾向と学習上のポイント」に続いて，問題を解くうえで，確実に理解してほしい概念や，定理の要点をダイジェスト的に記した．要点整理を理解して例題へ進み，問題をどんどん解いてほしい．もし，例題や演習問題でわからないところが出てきても，要点整理へ戻って理解を再確認してほしい．

なお，公式については，単に丸暗記するのではなく，たとえ忘れても公式を導出できるまで学習してほしい．

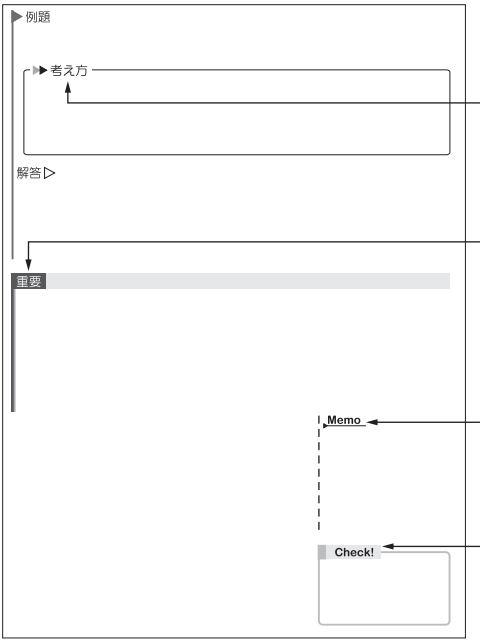
Step3　例題

例題は，最初から解答を見ないで解けるのが理想的であるが，解けない場合は，まずは考え方を読んで，解答を確認する．解答を読んで理解できたつもりで終わるのは「全くの都合のよい錯覚」である．必ずペンをもって解答用紙にまとめ上げてほしい．

Step4　演習問題

演習問題は，解答を見ないで独力で解くことが基本スタンスである．しかし，解けないからといって，落胆したり，その先に進めないようでは大きなロスにつながる．解答を見ても結構！ その代わり，転んでもただでは起きない心構えで，その解答から何か一つか二つは必ず得てほしい．

なお，例題と演習問題は，難易度によって無星→★→★★の３レベルで示した．「無星」は易～標準レベル，「★」は難レベル，「★★」は「極難」レベルの問題である．「無星」と「★」を独力で解けるならば，微分・積分に関しては合格基準とみてよいだろう．「★★」はかなりの難問であるが，より確実な合格へ至る試練の意味でチャレンジしてほしい．



▶▶考え方
問題を解くにあたって，最初に考慮すべき点や，解答へのアプローチを示す．

重要
確実に覚えてほしい重要事項や, 公式を示す．

Memo
覚えてほしい関連事項や，興味深い数学的知識などを示す．

Check!
問題の解答に関して注意すべき点や，補足事項を示す．

もくじ

▶ 第 1 章　ベクトル　1
1　ベクトルの内積　1
2　ベクトルの外積　3
演習問題 1　4
演習問題 1　解答　5

▶ 第 2 章　行列　6
1　行列　6
2　行列の演算　7
3　転置行列　10
4　対称行列と交代行列　11
5　正則行列と逆行列　12
6　行列の分割　14
7　複素行列　15
演習問題 2　18
演習問題 2　解答　19

▶ 第 3 章　行列式　25
1　行列と行列式のちがい　25
2　行列式の計算　27
3　行列式の基本性質　28
4　余因子による展開　30
5　覚えておくと便利な公式　40
演習問題 3　43
演習問題 3　解答　45

▶ 第 4 章　階数　52
1　階数の定義　52
2　階数の求め方　53
演習問題 4　56
演習問題 4　解答　56

▶ 第 5 章　連立 1 次方程式　60
1　未知数の数と方程式の数が一致する場合の解法　60
2　未知数の数と方程式の数が一致しない場合の解法　64
演習問題 5　70
演習問題 5　解答　70

▶ 第 6 章　ベクトル空間と線形写像　73
1　ベクトル空間　73
2　線形写像　76
演習問題 6　83
演習問題 6　解答　84

▶ 第 7 章　行列の対角化　89
1　固有値と固有ベクトル　89
2　固有多項式と固有方程式　90
3　行列の対角化　93
4　正規行列の対角化　100
5　固有値に関する諸性質　105
演習問題 7　109
演習問題 7　解答　110

▶ 第 8 章　行列の対角化の応用　116
1　2 次形式の標準形　116
2　2 次曲線の標準形　117
演習問題 8　121
演習問題 8　解答　122

▶ 第 9 章　ジョルダン標準形　129
1　ジョルダン細胞　129
2　ジョルダン標準形　131
3　最小多項式　137
4　2 次・3 次正方行列のジョルダン標準形　139
演習問題 9　141
演習問題 9　解答　141

▶ 補章　シュミットの正規直交化法　145

2　ベクトルの外積

(1) 外積の定義

外積は 3 次元空間ベクトルだけに適用される．

重要　外積の定義

二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，外積の大きさは

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta \quad (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \text{ を 2 辺とする平行四辺形の面積})$$

外積の演算結果はベクトルとなり，外積はベクトル積ともいう．3 次行列式のサラスの方法を用いれば，つぎのように表せる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

Memo
サラスの方法は第 3 章で説明する．また，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ はそれぞれ x，y，z 軸の正方向の単位ベクトルである．

(2) 幾何学的イメージ

外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のベクトルの向きは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回転するとき右ねじの進む向きである．また，外積の大きさは，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい．

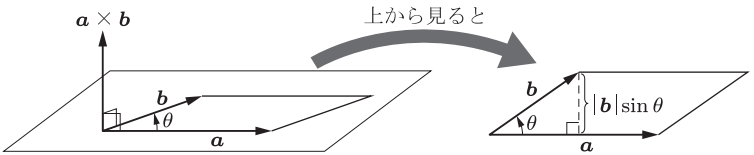


図 1.1

内積と外積の大きなちがいは，内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ と交換法則を満たすが，外積は $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ すなわち，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ となることである．一般的には交換法則を満たさない．

Memo
交換法則は可換則ともいう．

重要　外積の性質

❶ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$　　❷ $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

❸ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

例題 2　二つのベクトル $\boldsymbol{a} = (1, -2, 2)$，$\boldsymbol{b} = (3, -1, 2)$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ をそれぞれ求めなさい．

考え方

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めたら，$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ で求めてもよい．

解答▷　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の x 成分は，$-2 \times 2 - 2 \times (-1) = -4 + 2 = -2$ となる．
同様に，y 成分，z 成分を求めると，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-2, 4, 5)$ が得られる．
同様に，$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (2, -4, -5)$ となり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ が確かめられる．

（答）$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (-2, 4, 5)$，$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = (2, -4, -5)$

参考▷　また，行列式を用いて，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3 = (-2, 4, 5)$$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3 = (2, -4, -5)$$

から求めることができる．

▶▶▶ 演習問題 1

1　二つの実空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．
ただし，実空間ベクトル $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ に対して，$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の外積を表します．

(1)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めなさい．

(2)　実空間ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとき，m，n の値をそれぞれ求めなさい．

2　成分がすべて実数である 2 次正方行列全体の線形空間において，二つの 2 次正方行列 A，B の内積 (A, B) をつぎのように定義します（このように定義できることは証明しなくてかまいません）．

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

ここで，2 次正方行列 M において，${}^tM$ は M の転置行列，$\mathrm{tr}(M)$ は M の対角成分の和

Chapter 7

行列の対角化

▶▶ 出題傾向と学習上のポイント

線形代数の主要な分野であり，「数学検定」1 級における出題頻度もかなり高い．そのため，与えられた行列より固有方程式を解き，固有値，固有ベクトルを求め，行列を対角化する一連の計算を確実に行えることが重要です．さらに，行列が対角化可能かどうかをどのように判定するか理解しておきましょう．

1 固有値と固有ベクトル

ある 1 次変換（線形変換）A が与えられたとき，

「あるベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ があり，A は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ のスカラー倍に変換できるか」

という問題を考えよう．

A を相似変換に限定すれば，上記の問題に当てはまるが，A は相似変換とは限らない場合は，どう解答すればよいだろうか．

A が $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ のスカラー倍に変換することを，式で表せば，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \tag{7.1}$$

となる．これを満たす λ を**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する**固有ベクトル**という．

また，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と零ベクトル $\boldsymbol{0}$ の集合はベクトル空間 V の部分空間になり，V を固有値 λ に属する**固有空間**という．2 次元の座標軸で示せば，$\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ $(= \lambda\boldsymbol{x})$ は，図 7.1 のようになる．

Memo

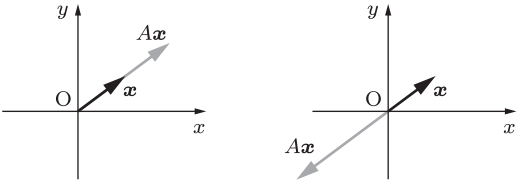
ベクトル空間 V からそれ自身への線形写像すなわち $f\colon V \to V$ を線形変換とよぶ．

Memo

2 次元では

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

が相似変換に相当する．



（a）$\lambda > 0$　　（b）$\lambda < 0$

図 7.1

2　固有多項式と固有方程式

(7.1) は，つぎのように変形できる．

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

この連立斉次 1 次方程式が自明な解 ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) 以外の解をもつための条件は，

$$|A - \lambda E| = 0$$

であった．このように，n 次正方行列 A が与えられたとき，λ が固有値である必要十分条件は

$$|A - \lambda E| = 0$$

である．すなわち，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とすれば，

$$\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

と表され，これを行列 A の**固有方程式**，$\varphi_A(\lambda)$ を変数 λ に関する**固有多項式**という．なお，固有方程式の解としての固有値の重複の度合いを**重複度**という．

Check!

固有方程式を解く際，$|\lambda E - A| = 0$ としてもよい．この場合は，$|\lambda E - A|$ を固有多項式と考えてよい．固有多項式 $\varphi_A(\lambda)$ が $|A - \lambda E|$ か $|\lambda E - A|$ かは，n が奇数のときに限り，一方に負号がつくだけなので，本質的にちがいはない．

例 1　固有方程式が $(\lambda-1)^3(\lambda+2)=0$ の場合，固有値 $\lambda=-2$ は重複度 1，固有値 $\lambda=1$ は重複度 3 である．

例題 1　行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，固有ベクトルを座標平面上に図示しなさい．

考え方

固有方程式から固有値を求め，その固有値に属する固有ベクトルを求める．

解答▷　固有方程式は，$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\lambda^2-6\lambda-7=0$，$(\lambda+1)(\lambda-7)=0$ から，固有値は $\lambda=-1,7$

(i)　$\lambda=-1$ のとき

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ を満たす固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ は，$5x_1+3y_1=0$ から，

$\boldsymbol{x}_1=c\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$　（c は 0 でない任意の定数）

$c=1$ として，$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ となる．

(ii)　$\lambda=7$ のとき

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=7\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を満たす固有ベクトル

$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ は，$x_2=y_2$ から，$\boldsymbol{x}_2=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　（c は 0 でない任意の定数）

これも $c=1$ として，$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．

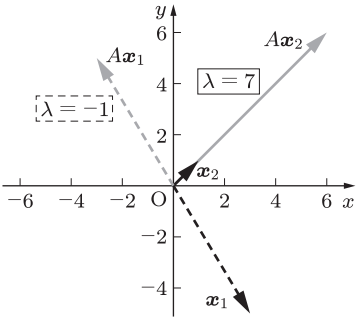


図 7.2

（答）固有値は $\lambda=-1,7$，固有ベクトルは

$\boldsymbol{x}_1=c\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$（$c$ は 0 でない任意の定数），$c=1$ として図示した結果を図 7.2 に示す．

例題 2　行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．

(1)　固有多項式を求めなさい．　　(2)　固有値を求めなさい．

考え方

(2)　固有値を固有方程式から求める．固有方程式は「固有多項式 $=0$」である．

解答▷　(1)　固有多項式は $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ である．行列式を展開して，

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3 + 2\lambda) - (\lambda^2 - 1)$$

$$= \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$$

（答）$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$

(2)　固有方程式 $\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0$ を変形すると，$(\lambda^2 - 1)^2 = \lambda^2$ より，$\lambda^2 - 1 = \lambda$ または $\lambda^2 - 1 = -\lambda$ となる．

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \text{ より，} \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \text{ より，} \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

がそれぞれ得られる．よって，固有値 λ はつぎの四つである．

（答）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$，$\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$

▶例題 3　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．

(1)　行列の固有値を求めなさい．

(2)　(1) で求めた各固有値に対する固有ベクトルを，正規化（大きさを 1 に標準化）して求めなさい．

▶▶考え方

(2)　大きさが 1 になるように固有ベクトルを定数倍する．

解答▷　(1)　固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = (2-\lambda)\left\{(2-\lambda)^2 - 2\right\}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

である．固有方程式を解くと，$\lambda = 2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$　　（答）2，$2+\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$

(2)　固有ベクトルの成分を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i)　$\lambda = 2$ のとき　$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-y = 0$，$-x - z = 0$ より，たとえば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる．正規化して $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る．

(ii)　$\lambda = 2 + \sqrt{2}$ のとき　$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-\sqrt{2}\,x - y = 0$，$-x - \sqrt{2}\,y - z = 0$，$-y - \sqrt{2}\,z = 0$ より，たとえば，$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．

正規化して $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

(iii)　$\lambda = 2 - \sqrt{2}$ のとき　$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sqrt{2}\,x - y = 0$，$-x + \sqrt{2}\,y - z = 0$，$-y + \sqrt{2}\,z = 0$ より，たとえば，$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．正規化して $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を得る．

（答）固有値 2 のとき $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，固有値 $2+\sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$，

固有値 $2-\sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

3　行列の対角化

n 次正方行列 A が相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ をもつとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ にそれぞれ属する固有ベクトルとする．このとき，これらは 1 次独立であり，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$ として，

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

が成り立ち，これから

Memo

$|A| = 8 - 15 = -7$，$\lambda_1\lambda_2 = (-1) \times 7 = -7$ より，$\lambda_1\lambda_2 = |A|$ と固有値と行列の関係 ❷ も確認できる．

---

(3) ケーリー・ハミルトンの定理

重要　ケーリー・ハミルトン（Cayley–Hamilton）の定理

正方行列 A の固有多項式を $\varphi_A(\lambda)$ とするとき，$\varphi_A(A) = O$ が成り立つ．

例 4　行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の場合にケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことを確認する．

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + a_{11}a_{22}E = (A - a_{11}E)(A - a_{22}E)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}a_{21}E$$

よって，$\varphi_A(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = O$ が成り立つことがわかる．

例題 8　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，A^n を求めよ．

考え方

(2) ではケーリー・ハミルトンの定理を活用する．

解答 ▷　(1)　$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ より，$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 1) = 0$

よって，$\lambda = 0$（重複度 2），-1　　（答）0（重複度 2），-1

(2)　ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^3 + A^2 = O$ が得られる．これより

$$A^3 = -A^2, \quad A^4 = A^3A = (-A^2)A = -A^3 = A^2$$

$$A^5 = A^4A = A^2A = A^3 = -A^2, \quad A^6 = A^5A = (-A^2)A = -A^3 = A^2, \cdots,$$

$$A^n = (-1)^n A^2$$

と推測できる．$n=2,3$ では成り立つことは明らかである．また，$n=k$ で成り立つと仮定する．$n=k+1$ とすると，

$$A^{k+1}=A^kA=(-1)^kA^2A=(-1)^kA^3=(-1)^k(-A^2)=(-1)^{k+1}A^2$$

より数学的帰納法から n を 2 以上の整数とするとき，$A^n=(-1)^nA^2$ が成り立つ．

$A^2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&3&-3\\0&2&-2\end{pmatrix}$ から

$$A^n=(-1)^nA^2=(-1)^n\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&3&-3\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

（答）$(-1)^n\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&3&-3\\0&2&-2\end{pmatrix}$

参考▷　例題 5 のように，A の固有値から固有ベクトルを求めて，A を対角化した結果から A^n を求めるのが一般的な手法であるが，この行列では対角化できないので，ケーリー・ハミルトンの定理を用いた．A が対角化できない場合はジョルダン標準形を用いることになるが，これは第 9 章で説明する．

▶例題 9　行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．

(1)　$A^n=A^{n-2}+A^2-E\quad(n\geqq 3)$ を示しなさい．

(2)　(1) を用いて A^{100} を求めなさい．

▶▶考え方

ケーリー・ハミルトンの定理を用いることに気付くことが大切である．

解答▷　(1)　$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&1-\lambda&3\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=-(\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1)$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^3-A^2-A+E=O$$

よって，$A^3=A+A^2-E$ となって，$n=3$ のとき成り立つことがわかる．

$n=k$ のとき，$A^k=A^{k-2}+A^2-E$ が成り立つと仮定する．$n=k+1$ とすると，

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=AA^k=A(A^{k-2}+A^2-E)=A^{k-1}+A^3-A\\&=A^{k-1}+A+A^2-E-A=A^{k-1}+A^2-E\end{aligned}$$

よって，$A^n=A^{n-2}+A^2-E\quad(n\geqq 3)$ が成り立つ．

(2)　$A^n-A^{n-2}=A^2-E$ より，階差数列と同じように考えて，

$$\begin{cases} A^{100} - \cancel{A^{98}} = A^2 - E \\ \cancel{A^{98}} - \cancel{A^{96}} = A^2 - E \\ \qquad\vdots \\ \cancel{A^4} - A^2 = A^2 - E \end{cases}$$

上式の左辺，右辺どうしをすべて足して，$A^{100} - A^2 = 49(A^2 - E)$
よって，

$$A^{100} = 50A^2 - 49E = 50\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 49\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 200 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（答）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 200 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

▶▶▶ 演習問題 7

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考えます．ただし，a，b は実数で $a \neq 0$，$b \neq 0$，$|a| \neq |b|$ とします．このとき，A の固有値，および正規化した固有ベクトルを求めなさい．

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ と $B = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E$ という二つの行列に対して，B の逆行列 B^{-1} を A と E を用いて表しなさい．

3★ A を n 次実正方行列として，A の転置行列を ${}^tA$ で表します．

$$S = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad T = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とおき，$2n$ 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} S & T \\ -T & -S \end{pmatrix}$ をつくるとき，つぎの問いに答えなさい．

(1) B が対称行列であることを示しなさい．

(2) λ が B の固有値であるとき，$-\lambda$ も B の固有値であることを示しなさい．

(3) λ が B の固有値であるとき，λ^2 が対称行列 $A\,{}^tA$ の固有値であることを示しなさい．

4★★ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，つぎの問いに答えなさい．

(1) A の固有方程式を求めなさい．

(2) 整数 $n \geqq 1$ に対して，$A^{2n+1} = 4^n A$ となることを証明しなさい．また，A^{2n} はどのような行列になるかを説明しなさい．

5★ A，B，C をある三角形の三つの内角の大きさとして，以下のような行列 P を考えるとき，つぎの問いに答えなさい．

著 者 略 歴

中村　力（なかむら・ちから）
北海道大学大学院理学研究科修了
JFE スチール(株)などを経て，公益財団法人 日本数学検定協会に勤務
現在に至る

公益財団法人 日本数学検定協会
〒110-0005　東京都台東区上野 5-1-1
TEL：03(5812)8340
FAX：03(5812)8346
ホームページ http://www.su-gaku.net/

編集担当　田中芳実(森北出版)
編集責任　上村紗帆・富井　晃(森北出版)
組　　版　プレイン
印　　刷　丸井工文社
製　　本　　同

数学検定 1 級準拠テキスト　線形代数
© 中村　力　*2016*

2016 年 7 月 21 日　第 1 版第 1 刷発行
【本書の無断転載を禁ず】

監　　修　公益財団法人 日本数学検定協会
著　　者　中村　力
発 行 者　森北博巳
発 行 所　**森北出版株式会社**
東京都千代田区富士見 1-4-11（〒102-0071）
電話 03-3265-8341／FAX 03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/
日本書籍出版協会･自然科学書協会　会員
JCOPY　＜(社)出版者著作権管理機構 委託出版物＞

落丁･乱丁本はお取替えいたします.

Printed in Japan／ISBN978-4-627-05821-7