数学検定
準拠テキスト

1級

微分積分

Calculus

公益財団法人 日本数学検定協会 監修
中村　力 著

森北出版株式会社

「数学検定１級準拠テキスト　微分積分」

サンプルページ

この本の定価・判型などは，以下の URL からご覧いただけます.
http://www.morikita.co.jp/books/mid/005811

※このサンプルページの内容は，初版１刷発行時のものです.

●本書のサポート情報を当社 Web サイトに掲載する場合があります．
下記の URL にアクセスし，サポートの案内をご覧ください．

http://www.morikita.co.jp/support/

●本書の内容に関するご質問は，森北出版 出版部「(書名を明記)」係宛に書面にて，もしくは下記の e-mail アドレスまでお願いします．なお，電話でのご質問には応じかねますので，あらかじめご了承ください．

editor@morikita.co.jp

●本書により得られた情報の使用から生じるいかなる損害についても，当社および本書の著者は責任を負わないものとします．

■本書に記載している製品名，商標および登録商標は，各権利者に帰属します．

■本書を無断で複写複製（電子化を含む）することは，著作権法上での例外を除き，禁じられています．複写される場合は，そのつど事前に(社)出版者著作権管理機構（電話 03-3513-6969，FAX 03-3513-6979，e-mail：info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください．また本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャンやデジタル化することは，たとえ個人や家庭内での利用であっても一切認められておりません．

まえがき

「数学検定」1 級の出題範囲は広大であり，1 級に合格するには，地道な学習の積み重ねと，短時間で解答をまとめあげる答案作成力が要求される．

先に上梓した「ためせ実力！めざせ 1 級！ 数学検定 1 級 実践演習」では，1 級出題範囲の過去問題，解答・解説を三つのレベルに分けて 1 冊にまとめた．これにより，1 級の過去問題の全容を俯瞰できるだろう．しかし，1 級の出題範囲はあまりに広範にわたるため，読者の中にはもっと理解を深めたい箇所もいくつかあると思われる．

本書は，「数学検定」1 級を目指す方が，主要な出題範囲の一つである「微分法・積分法」の学習において，これらに関連する知見を効率的に学習し，豊富な例題や演習問題を解くことで，より一層の理解と答案作成力の向上を図ることを目的とする．

本書に掲載された問題には，「数学検定」1 級で過去に出題された問題が多く含まれているので，1 級合格へ向けた効果的な学習を期待できるだろう．

また，微分・積分をもっと学習したい，「数学検定」1 級レベルの手ごたえのある問題をもっと解いてみたいといった知的充足感を満たすためにも，本書はおおいに活用できると思う．

本書を最大限に活用することにより，「数学検定」最難関である 1 級合格を手中に収めていただきたい．ただし，「数学検定」1 級合格はゴールではない．1 級の彼方にある数学の世界はさらに奥が深く，魅力的かつ神秘的である．1 級合格はこれらを理解するための一歩を踏み出したに過ぎない．さらに，学習，研鑽を積まれて，その世界を歩まれるならば，著者の望外の喜びになるだろう．

2016 年 5 月

著　者

本書の使い方

Step1　出題傾向と学習上のポイント

各章・節ごとに，過去の出題傾向の概要を示して，学習上の対策やアドバイスを記している．これにより，これから学習していく方向性やプランが設定できると思う．

Step2　要点整理

「出題傾向と学習上のポイント」に続いて，問題を解くうえで，確実に理解してほしい概念や，定理の要点をダイジェスト的に記した．要点整理を理解して例題へ進み，問題をどんどん解いてほしい．もし，例題や演習問題でわからないところが出てきても，要点整理へ戻って理解を再確認してほしい．

なお，公式については，単に丸暗記するのではなく，たとえ忘れても公式を導出できるまで学習してほしい．

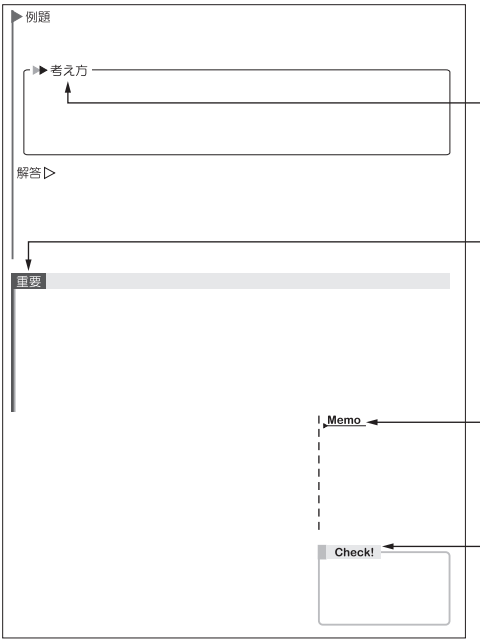
Step3　例題

例題は，最初から解答を見ないで解けるのが理想的であるが，解けない場合は，まずは考え方を読んで，解答を確認する．解答を読んで理解できたつもりで終わるのは「全くの都合のよい錯覚」である．必ずペンをもって解答用紙にまとめ上げてほしい．

Step4　演習問題

演習問題は，解答を見ないで独力で解くことが基本スタンスである．しかし，解けないからといって，落胆したり，その先に進めないようでは大きなロスにつながる．解答を見ても結構！ その代わり，転んでもただでは起きない心構えで，その解答から何か一つか二つは必ず得てほしい．

なお，例題と演習問題は，難易度によって無星→★→★★の３レベルで示した．「無星」は易～標準レベル，「★」は難レベル，「★★」は「極難」レベルの問題である．「無星」と「★」を独力で解けるならば，微分・積分に関しては合格基準とみてよいだろう．「★★」はかなりの難問であるが，より確実な合格へ至る試練の意味でチャレンジしてほしい．



▶▶考え方
問題を解くにあたって，最初に考慮すべき点や，解答へのアプローチを示す．

重要
確実に覚えてほしい重要事項や, 公式を示す．

Memo
覚えてほしい関連事項や，興味深い数学的知識などを示す．

Check!
問題の解答に関して注意すべき点や，補足事項を示す．

もくじ

▶ 第１章　極限に関する基本概念 ―― 1

1　数列と級数の極限 ---------- 1

2　関数の極限 ---------- 7

3　指数関数・対数関数・逆三角関数 ---- 8

演習問題１ ---------- 17

演習問題１　解答 ---------- 17

▶ 第２章　微分法 ―――――― 21

1　導関数の計算 ---------- 21

2　微分法の応用 ---------- 39

演習問題２ ---------- 43

演習問題２　解答 ---------- 44

▶ 第３章　積分法 ―――――― 50

1　不定積分の計算 ---------- 50

2　定積分の計算 ---------- 60

3　定積分の応用 ---------- 76

演習問題３ ---------- 83

演習問題３　解答 ---------- 85

▶ 第４章　偏微分法 ―――――― 99

1　偏導関数の計算 ---------- 99

演習問題４－１ ---------- 115

演習問題４－１　解答 ---------- 116

2　偏微分法の応用 ---------- 122

演習問題４－２ ---------- 136

演習問題４－２　解答 ---------- 136

▶ 第５章　重積分法 ―――――― 144

1　重積分の計算 ---------- 144

演習問題５－１ ---------- 169

演習問題５－１　解答 ---------- 170

2　重積分の応用 ---------- 177

演習問題５－２ ---------- 191

演習問題５－２　解答 ---------- 192

▶ 付録　関数行列式の微分 ―――― 197

Chapter 1

極限に関する基本概念

1 数列と級数の極限

▶▶出題傾向と学習上のポイント

極限は微分・積分に至る重要な基本概念です．数列の極限と収束，また，級数の収束に関する基本事項の理解は重要です．とくに，「はさみうちの原理」を用いる問題は出題頻度も高いので，確実に解答できるようにしましょう．

(1) 数列の極限と収束

数列 $\{a_n\}$ で，n が限りなく大きくなるにつれて，a_n が限りなく一定の実数 α に近づくとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

と表し，α を極限値という．このとき，$\{a_n\}$ は α に収束するという．

一方，収束しない数列は発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to +\infty\ (-\infty)$$

と表し，極限がプラス（マイナス）無限大であるという．なお，発散する数列でも，プラス（マイナス）無限大にも発散しないものがあり，これは振動するという．振動する数列の場合は極限がない．

(2) 級数の収束

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (1.1)

が収束するか発散するかは，第 n 項までの部分和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ がつくる数列 $\{S_n\}$ が，$n \to \infty$ で数列 $\{S_n\}$ が収束するか，発散するかを調べることでわかる．

すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ であるとき，無限級数 (1.1) は S に収束するといい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と表す．収束しない無限級数 (1.1) は発散するという．

例題 1　つぎの数列の極限値を求めなさい．ただし，$0 < |a| < 1$ とする．

(1)　$\{na^n\}$　　(2)　$\{n^2a^n\}$　　(3)　$\{n^\alpha a^n\}$　（α は任意の実数）

考え方

$|a| < 1$ のとき，$\dfrac{1}{|a|} = 1 + h \quad (h > 0)$ とおいて，つぎのように二項定理で展開する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{|a|^n} &= (1+h)^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k + \cdots\end{aligned}$$

解答▷　(1)　$\dfrac{1}{|a|^n} > \dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ より，$0 < |a|^n < \dfrac{2}{n(n-1)h^2}$，$0 < n|a|^n < \dfrac{2}{(n-1)h^2}$

である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n|a|^n = \lim_{n\to\infty} |na^n| = 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n = 0$　　（答）0

(2)　$\dfrac{1}{|a|^n} > \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3$ より，$0 < n^2|a|^n < \dfrac{6n^2}{n(n-1)(n-2)h^3}$ である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)h^3} = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2|a^n| = \lim_{n\to\infty} |n^2a^n| = 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2a^n = 0$　　（答）0

(3)　α を正の実数として，$[\alpha] = k$ とする．$k \leqq \alpha < k+1$（k は正の整数）より，$n^k \leqq n^\alpha < n^{k+1}$ だから

$$n^k|a|^n \leqq n^\alpha|a|^n < n^{k+1}|a|^n \qquad \cdots ①$$

Memo

[ ] はガウス記号で，$[\alpha]$ は α を超えない最大整数を表す．

$\dfrac{1}{|a|^n} > \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}$，$\dfrac{1}{|a|^n} > \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{(k+2)!}h^{k+2}$ より

$$0 < \lim_{n\to\infty} n^k|a|^n < \lim_{n\to\infty} \frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}} = 0$$

$$0 < \lim_{n\to\infty} n^{k+1}|a|^n < \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k+1}(k+2)!}{n(n-1)\cdots(n-k-1)h^{k+2}} = 0$$

Check!

不等式の右辺において，分母は分子よりも n の次数が 1 大きいので，$n \to \infty$ で 0 に近づく．

$n \to \infty$ のとき，① の $n^k|a|^n$，$n^{k+1}|a|^n$ はともに 0 に収束するため，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha |a|^n = \lim_{n\to\infty} |n^\alpha a^n| = 0,\ \text{よって}\ \lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0$$

つぎに，α を負の実数として，$-\alpha = \beta > 0$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n^\beta} = 0 \times 0 = 0$$

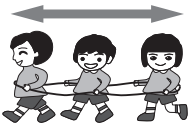
$\alpha = 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0$　　（答）0

Memo　はさみうちの原理

はさみうちの原理はひらがなのままだとイメージがつかみにくいが，漢字では「挟み撃ちの原理」と書く．3 人の子どもがやっている電車ごっこで，先頭と後尾の間隔が詰まってきて，3 人がいっしょになってしまうイメージである．英語では「squeeze theorem」や，「sandwich theorem」などと表す．



例題 2　つぎの極限値を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n - \sin\sqrt{n}}{n + \sin\sqrt{n}}$

考え方

不定形に対する有理化，数列の和の公式，はさみうちの原理などを適用する．

解答▷　(1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

（答）$\dfrac{1}{2}$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1)}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} + n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - n}{3n^3} = \frac{4}{3}$$

（答）$\dfrac{4}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sin\sqrt{n}}{n+\sin\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}}$

$-1\leqq\sin\sqrt{n}\leqq 1$，$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\sin\sqrt{n}\leqq\dfrac{1}{n}$ で，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pm\frac{1}{n}\right)=0$ よりはさみうちの原理を使うと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}=0$ となって，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sin\sqrt{n}}{n+\sin\sqrt{n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$　　（答）1

Check!
(3) は「はさみうちの原理」を使う．

例題 3★　初項 117，公差 -6 の等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，つぎの極限値を求めなさい．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{30}{S_k}^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

考え方
まずは，S_k を求める．$1\leqq k\leqq 30$ のときの S_k の最大値に注目して不等式を求め，はさみうちの原理を活用する．

解答▷　$S_k=\{2\cdot 117+(k-1)\cdot(-6)\}\cdot\dfrac{k}{2}=-3k^2+120k=-3(k-20)^2+1200$ より，$1\leqq k\leqq 30$ において，$k=20$ のとき S_k は最大値 1200 をとる．すなわち，$\max\{S_1,S_2,\ldots,S_{30}\}=S_{20}=1200$ となる．

つぎに，

$$\left(\sum_{k=1}^{30}{S_k}^x\right)^{\frac{1}{x}}=({S_1}^x+{S_2}^x+{S_3}^x+\cdots+{S_{20}}^x+\cdots+{S_{30}}^x)^{\frac{1}{x}}$$

を調べる．$x\to\infty$ を考えるので，$0<x$ としてよい．

${S_{20}}^x<{S_1}^x+{S_2}^x+\cdots+{S_{20}}^x+\cdots+{S_{30}}^x<30{S_{20}}^x$ より，

$$({S_{20}}^x)^{\frac{1}{x}}<({S_1}^x+{S_2}^x+\cdots+{S_{20}}^x+\cdots+{S_{30}}^x)^{\frac{1}{x}}<(30{S_{20}}^x)^{\frac{1}{x}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}({S_{20}}^x)^{\frac{1}{x}}=S_{20}=1200$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}30^{\frac{1}{x}}=1$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(30{S_{20}}^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}(30^{\frac{1}{x}}S_{20})=S_{20}\ (=1200)$

したがって，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{30}{S_k}^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}({S_1}^x+{S_2}^x+\cdots+{S_{30}}^x)^{\frac{1}{x}}=1200$$

（答）1200

例題 4★★　つぎの極限値を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}-\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right\}$$

考え方

$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ を活用する．

解答▷ $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}-\dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}=\dfrac{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-1}-n^{2n}}{n^n(n-1)^{n-1}}$ …①

また，$\dfrac{1}{(n-1)^{n-1}}=\dfrac{1}{n^{n-1}}\times\dfrac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}=\dfrac{1}{n^{n-1}}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ より，

$$①=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-1}-n^{2n}}{n^{2n-1}} \quad \cdots ②$$

さらに，

$$\begin{aligned}&(n+1)^{n+1}(n-1)^{n-1}-n^{2n}=(n+1)^2(n+1)^{n-1}(n-1)^{n-1}-n^{2n}\\&=(n^2-1+2n+2)(n^2-1)^{n-1}-n^{2n}\\&=2n\left(1+\frac{1}{n}\right)(n^2-1)^{n-1}-\{(n^2)^n-(n^2-1)^n\}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}②&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\frac{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)(n^2-1)^{n-1}-\{(n^2)^n-(n^2-1)^n\}}{n^{2n-1}}\\&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot(A_n-B_n)\end{aligned}$$

ここで，$A_n=2n\left(1+\frac{1}{n}\right)(n^2-1)^{n-1}\times\frac{1}{n^{2n-1}}$，$B_n=\frac{(n^2)^n-(n^2-1)^n}{n^{2n-1}}$ とおく．

よって，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}-\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)\end{aligned}$$

となる．以下では，それぞれの項の極限を考える．

まず，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e$ である．

また，$A_n=2n\left(1+\frac{1}{n}\right)(n^2-1)^{n-1}\times\frac{1}{n^{2n-1}}$

Chapter 5

重積分法

1 重積分の計算

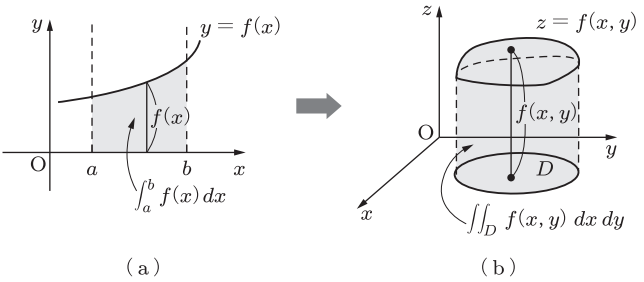
▶▶ 出題傾向と学習上のポイント

重積分の計算は，出題範囲が高い分野です．1 変数の不定積分や定積分にはない重積分特有の積分の順序交換，ヤコビアンによる 1 次変換や，極座標への変数変換の公式を確実に理解し，十分な演習を積みましょう．

(1) 重積分

A. $\int f(x)\,dx$ から $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ への拡張

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積を表す（図 5.1 (a)）．



（a）　　（b）

図 5.1

それでは，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は何を表すか．図 (b) で示すように，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は xy 平面での閉領域 D が底面で，高さを $z=f(x,y)$ とする立体の体積を表す．また，$z=f(x,y)=1$ とした場合，$\displaystyle\iint_D dx\,dy$ は xy 平面での閉領域 D の面積を表す．

B. 重積分の計算

重要　閉長方形領域における重積分

閉領域 D が $a \leqq x \leqq b$，$c \leqq y \leqq d$ において，関数 $f(x,y)$ が連続ならば，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$$

$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は xy 平面での閉領域 D が底面で，高さを $z = f(x,y)$ とする立体の体積を表すことを説明した．この体積は，y 軸に垂直な断面積 $g(y)$ $\left(= \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx\right)$ を y 軸方向に積分して求められる（図 5.2 (a)）．すなわち，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

また，この体積は，x 軸に垂直な断面積 $h(x)$ $\left(= \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy\right)$ を x 軸方向に積分しても求められる（図 (b)）．すなわち，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx$$

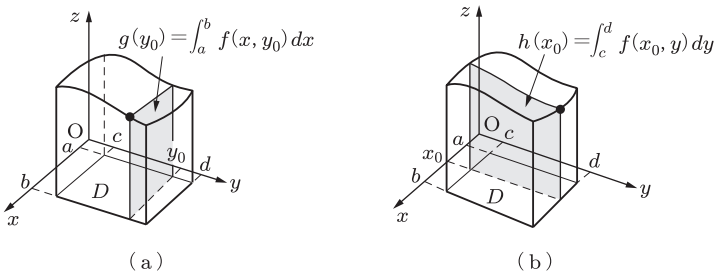


図 5.2

重積分は 1 次元の積分を繰り返すという意味で，**累次積分**ともいう．

とくに，$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ のとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$$

が成り立つ．

Memo

$f(x,y)$ が x，y のみの式に因数分解できる場合である．なお，$g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で，$h(y)$ は $c \leqq y \leqq d$ で，それぞれ連続である．

Check!

$\displaystyle\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$ と表記することがあるが，

$\displaystyle\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$ を $\displaystyle\int_c^d dy \times \int_a^b f(x,y)\,dx = (d-c)\int_a^b f(x,y)\,dx$ と勘違いしないように注意する．

▶ 例題 1

$\displaystyle\iint_D (x+y)\,dx\,dy$，$D = \{(x,y) \colon a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ を計算しなさい．

▶▶ 考え方

領域 D は矩形（長方形）であることに注意する．

解答▷

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b (x+y)\,dx \right\} dy = \int_c^d \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=a}^{x=b} dy$$

$$= \int_c^d \left\{ \frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)y \right\} dy = \frac{b^2-a^2}{2}(d-c) + (b-a)\frac{d^2-c^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)(d-c)(a+b+c+d)}{2}$$

（答）$\dfrac{(b-a)(d-c)(a+b+c+d)}{2}$

参考▷　積分の順序を変えて，

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d (x+y)\,dy \right\} dx$$

$$= \int_a^b \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=c}^{y=d} dx = \int_a^b \left\{ x(d-c) + \frac{d^2-c^2}{2} \right\} dx$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}(d-c) + \frac{d^2-c^2}{2}(b-a) = \frac{(b-a)(d-c)(a+b+c+d)}{2}$$

としても結果は一致する．

重要　単純な閉領域における重積分

(i) $f(x,y)$ が連続，閉領域 D が $a \leqq x \leqq b$，$\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$ の場合

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

(ii) $f(x,y)$ が連続，閉領域 D が $\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)$，$c \leqq y \leqq d$ の場合

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

(i) の領域は，x の上限・下限が定数で，y（x の関数）で上限・下限をはさむイメージ（図 5.3(a)）

(ii) の領域は，y の上限・下限が定数で，x（y の関数）で上限・下限をはさむイメージ（図 (b)）

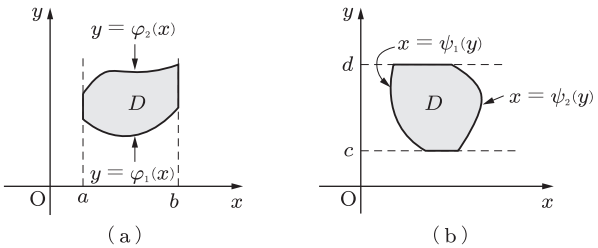


図 5.3

C. 積分の順序交換

重要　積分の順序交換

閉領域 D が $a \leqq x \leqq b$，$\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$ もしくは，$\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)$，$c \leqq y \leqq d$ で囲まれた領域で，関数 $f(x,y)$ が連続ならば，つぎのように積分順序を交換できる．

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

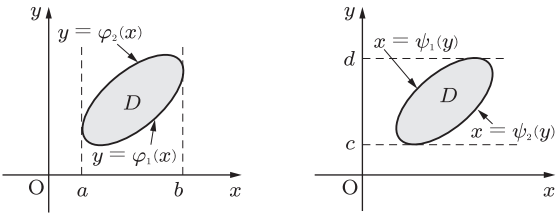


図 5.4

Memo

$\displaystyle\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$ や $\displaystyle\int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$ の構造をみてみよう．

上端・下端は x の関数　　相等しい　　上端・下端は y の関数

$$\int_a^b \underbrace{\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right\}}_{x\text{ の関数 }F_1(x)} dx = \int_a^b F_1(x)\,dx \qquad \int_c^d \underbrace{\left\{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right\}}_{y\text{ の関数 }F_2(y)} dy = \int_c^d F_2(y)\,dy$$

$F_1(x)$，$F_2(y)$ はそれぞれ x 軸，y 軸に垂直に切った立体の断面積である．

例 1　$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{2y} xy\,dx\right) dy$ に関して，積分順序を変えても結果が変わらないことを確認してみる．

xy 平面での領域，$0 \leqq y \leqq 1$，$y-1 \leqq x \leqq 2y$ は図 5.5 のようになる．そこで，

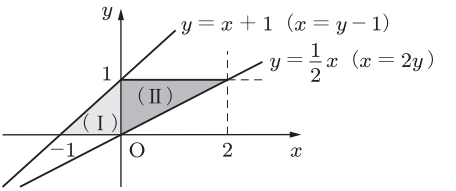


図 5.5

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{2y} xy\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{yx^2}{2}\right]_{x=y-1}^{x=2y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \{y(2y)^2 - y(y-1)^2\}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (3y^3 + 2y^2 - y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}y^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{11}{24} \qquad \cdots ①
\end{aligned}$$

今度は，領域を (I) と (II) に分けて，積分順序を変えると，

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} xy\,dy\right) dx + \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 xy\,dy\right) dx$$

となる．第 1 項を計算すると，

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} xy\,dy\right) dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \left(x^3 + 2x^2 + x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

となる．また，第 2 項は

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 xy\,dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

より，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{2y} xy\,dx\right) dy = -\frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$．すなわち，① の結果と一致する．

▶ **例題 2**　つぎの 2 重積分を求めなさい．

(1)　$\displaystyle\iint_D e^{px+qy}\,dx\,dy,\ \ D=\{(x,y)\colon 0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$

(2)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{y}\,dx\,dy,\ \ D=\left\{(x,y)\colon \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leqq 1\quad (a>0, b>0)\right\}$

(3★)　$\displaystyle\int_0^3 dy\int_0^{\sqrt{\frac{y}{3}}}\log_e(x^3-3x+3)\,dx$

▶▶ 考え方

まずは，xy 平面での領域 D を図示することから始める．(3) では $\displaystyle\int\log_e(x^3-3x+3)\,dx$ は，このままでは計算できないので，積分の順序交換を試みる．

解答▷　(1)

$$\iint_D e^{px+qy}\,dx\,dy=\int_0^b\left(\int_0^a e^{px+qy}\,dx\right)dy=\int_0^b\left[\frac{e^{px+qy}}{p}\right]_{x=0}^{x=a}dy$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^b e^{qy}(e^{pa}-1)\,dy=\frac{e^{pa}-1}{p}\left[\frac{e^{qy}}{q}\right]_{y=0}^{y=b}=\frac{(e^{pa}-1)(e^{qb}-1)}{pq}$$

（答）$\dfrac{(e^{pa}-1)(e^{qb}-1)}{pq}$

(2)　$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ のとき，$x=a\left(1-\sqrt{\dfrac{y}{b}}\right)^2$

$D=\left\{(x,y)\colon 0\leqq x\leqq a\left(1-\sqrt{\dfrac{y}{b}}\right)^2,\ 0\leqq y\leqq b\right\}$　（図 5.6 の灰色部分）より，

$$\iint_D\sqrt{y}\,dx\,dy=\int_0^b\left(\int_0^{a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2}\sqrt{y}\,dx\right)dy=\int_0^b\sqrt{y}[x]_{x=0}^{x=a\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2}dy$$

$$=a\int_0^b\sqrt{y}\left(1-\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2dy=a\int_0^b\left(\sqrt{y}-\frac{2y}{\sqrt{b}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{b}\right)dy$$

$$=a\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\sqrt{b}}\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^b=\frac{1}{15}ab^{\frac{3}{2}}$$

（答）$\dfrac{1}{15}ab^{\frac{3}{2}}$

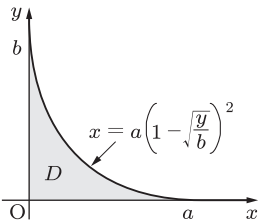


図 5.6

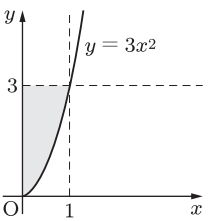


図 5.7

(3)　積分範囲は，$0 \leqq y \leqq 3$，$0 \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{y}{3}}$ で，図 5.7 の灰色部分である．この領域を $0 \leqq x \leqq 1$，$3x^2 \leqq y \leqq 3$ とおき換えることができる．

すなわち，もとの累次積分はつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{\frac{y}{3}}} \log_e(x^3-3x+3)\,dx \\
&= \int_0^1 dx \int_{3x^2}^3 \log_e(x^3-3x+3)\,dy = \int_0^1 \Big[y\log_e(x^3-3x+3)\Big]_{y=3x^2}^{y=3}\,dx \\
&= \int_0^1 (3-3x^2)\log_e(x^3-3x+3)\,dx
\end{aligned}$$

$x^3-3x+3=t$ とおくと，$(3x^2-3)\,dx = dt$ となって

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (3-3x^2)\log_e(x^3-3x+3)\,dx = \int_3^1 \log_e t(-dt) = \int_1^3 \log_e t\,dt \\
&= \Big[t\log_e t - t\Big]_1^3 = 3\log_e 3 - 3 + 1 = 3\log_e 3 - 2
\end{aligned}$$

（答）$3\log_e 3 - 2$

別解▷　(1)　$\displaystyle\iint_D e^{px+qy}\,dx\,dy = \int_0^a e^{px}\,dx \cdot \int_0^b e^{qy}\,dy = \frac{(e^{pa}-1)(e^{qb}-1)}{pq}$

▶例題 3　$\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dx\,dy$，$D=\{(x,y)\colon |x|+|y| \leqq 1\}$ を求めなさい．

▶▶考え方

領域 D $(|x|+|y| \leqq 1)$ を図示し，領域 I，II，III，IV に分割して計算する．

解答▷　D は図 5.8 の色のついた部分である．

$$\begin{aligned}
&\iint_D (|x|+|y|)\,dx\,dy \\
&= \iint_{\mathrm{I}} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{\mathrm{II}} (-x+y)\,dx\,dy \\
&\quad + \iint_{\mathrm{III}} (-x-y)\,dx\,dy + \iint_{\mathrm{IV}} (x-y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{I}} (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)\,dy = \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left\{x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right\} dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

著 者 略 歴

中村　力（なかむら・ちから）
北海道大学大学院理学研究科修了
JFE スチール(株)などを経て，公益財団法人 日本数学検定協会に勤務
現在に至る

公益財団法人 日本数学検定協会
〒110-0005　東京都台東区上野 5-1-1
TEL：03(5812)8340
FAX：03(5812)8346
ホームページ http://www.su-gaku.net/

編集担当　田中芳実(森北出版)
編集責任　上村紗帆・富井　晃(森北出版)
組　　版　プレイン
印　　刷　丸井工文社
製　　本　　同

数学検定 1 級準拠テキスト　微分積分　　© 中村　力　*2016*

2016 年 7 月 21 日　第 1 版第 1 刷発行　【本書の無断転載を禁ず】

監　　修　公益財団法人 日本数学検定協会
著　　者　中村　力
発 行 者　森北博巳
発 行 所　**森北出版株式会社**
東京都千代田区富士見 1-4-11（〒102-0071）
電話 03-3265-8341／FAX 03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/
日本書籍出版協会･自然科学書協会　会員
JCOPY　＜(社)出版者著作権管理機構 委託出版物＞

落丁･乱丁本はお取替えいたします.

Printed in Japan／ISBN978-4-627-05811-8